МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра вычислительной техники

# ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по изучению дисциплины и задания для расчетных работ
студентам сельскохозяйственных вузов специальностей:
1-740605-01 «Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика)»
1-740605-02 «Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (теплоэнергетика)»
1-530101 «Автоматизация технологических процессов и производств»

МИНСК – 2007

УДК 519.8+004.9](07)
ББК22.18я7
О 75

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по изучению дисциплины и задания для расчетных работ студентам сельскохозяйственных вузов специальностей: 1-740605-01 “Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика)”1-740605-02 “Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (теплоэнергетика)” и 1-530101 “Автоматизация технологических процессов и производств”рассмотрены на заседании методической комиссии факультета АЭФ и рекомендованы к изданию на ротапринте БГАТУ.

Протокол №10 от 15 мая 2007г.

Составители: д.т.н., доцент Прищепов М.А.
к.т.н., доцент Киселев Б.М.
к.т.н., доцент Кубарко А.Н.
ст. преподаватель Рутковский И.Г.

# ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы научных исследований и моделирование» является одной из основных теоретических дисциплин при подготовке инженеров-электриков. Она базируется на знаниях, полученных студентами при изучении курсов «Вычислительная техника, информатика и программирование», «Высшая математика», общенаучных и общеинженерных дисциплин, в частности, «Теоретические основы электротехники», и др.

Основная цель дисциплины – обучение студентов общим вопросам теории моделирования, методам построения математических моделей и формального описания процессов и объектов, применению математических моделей для проведения вычислительных экспериментов (прогноза).

В задачи дисциплины входит ознакомление студентов с основными понятиями моделирования, теоретическими положениями, используемыми для построения математических моделей, методами построения математических моделей и их исследования, численными методами реализации моделей на ЭВМ, методами постановки и проведения вычислительных экспериментов (прогнозов), анализом их результатов. В ходе изучения дисциплины студент должен освоить методы построения математических моделей, алгоритмов и программ их исследования, а также применение пакетов прикладных программ (ППП).

При изучении дисциплины студентам предлагается выполнить самостоятельно четыре расчетные работы.

В указаниях к каждой работе приведены вопросы, подлежащие изучению, краткие теоретические сведения по изучаемой теме, которые пояснены примерами фрагментов решения конкретных задач, а также вопросы для самоконтроля уровня освоения материала.

Дисциплины «Основы научных исследований и моделирование» на агроэнергетическом факультете читается в объеме 102-х часов. Студенты заочной формы обучения выполняют контрольные работы только на одном из языков программирования (**Basic** или **Pascal**). А студенты дневной формы обучения выполняют эти расчетные работы на языке программирования, в электронных таблицах и в ППП **Matlab**.

Ввиду отсутствия единого учебника или учебного пособия по дисциплине «Основы научных исследований и моделирование» приводим список литературы, который может быть использован при изучении отдельных вопросов программы дисциплины. Его необходимо также дополнить учебниками и учебными пособиями по специальным дисциплинам и по высшей математике, содержащими изложение понятий и методов, используемых в математическом моделировании.

# 1 ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Вопросы.** Понятие моделирования, объекта моделирования и его модели. Классификация моделей. Роль моделирования в процессах познавательной и практической деятельности человека. Понятие математической модели (ММ). Определение ММ. Формы представления ММ. Классификация ММ, их области применения. Роль математического моделирования в ускорении социального и научно-технического процесса. ММ состояний объектов. Методы качественного и количественного исследования ММ.

**Моделированием** называется процесс изучения реального объекта, проводимый не на самом объекте, а на его модели. **Моделирование** – основной метод научных исследований во всех областях естествознания и единственный научно-обоснованный метод оценок систем произвольной природы, используемый при принятии решений во всех сферах человеческой деятельности.

Это один из **современных инструментов** системного анализа и синтеза объектов (систем).

Понятие **процесса моделирования** неразрывно связанно с понятием **объекта** или **системы** моделирования и его **модели**.

Под **объектом** или **системой моделирования** обычно понимается совокупность предметов, как реальных, так и идеальных, которая организована определенным образом. Такую совокупность предметов будем называть **полем системы**, а данные, которые описывают организацию системы – **характеристикой**.

Под моделью понимается такой материальный или абстрактный, мысленно созданный объект, который в процессе изучения (исследования) заменяет реальный объект, но сохраняет при этом его важнейшие свойства.

**Модель** – это некоторая аналогия: для одной системы должна существовать другая система, элементы которой с определенной точки зрения подобны элементам первой. Необходимо уяснить, что слово модель никогда не означает просто систему. Модель – определенное отношение между двумя системами, одну из которых называем моделируемой системой, а другую – моделирующей системой.

При построении любой модели преследуются конкретные цели, т. е. содержание тех задач, которые на модели необходимо решить всегда должно быть известно. Для одного и того же объекта может быть построено несколько моделей, отображающих определенные стороны исследуемого объекта (системы) или характеризующих его с разной степенью детализации. Т. о. **сущность моделирования** заключается в замене всей системы или ее некоторых элементов моделью, по своим свойствам в той или иной мере, воспроизводящей свойства исходной системы или ее отдельных частей.

**Математическое моделирование** – это описание поведения физических систем при помощи математических уравнений или соотношений называемых **математической моделью** (ММ).

Математическое моделирование можно рассматривать как средство изучения реальной системы путем ее замены более удобной для экспериментального исследования абстрактной системой (моделью), сохраняющей существенные черты оригинала.

Классификация моделей по основным признакам приведена на схеме 1.

Классификация моделей по основным признакам:

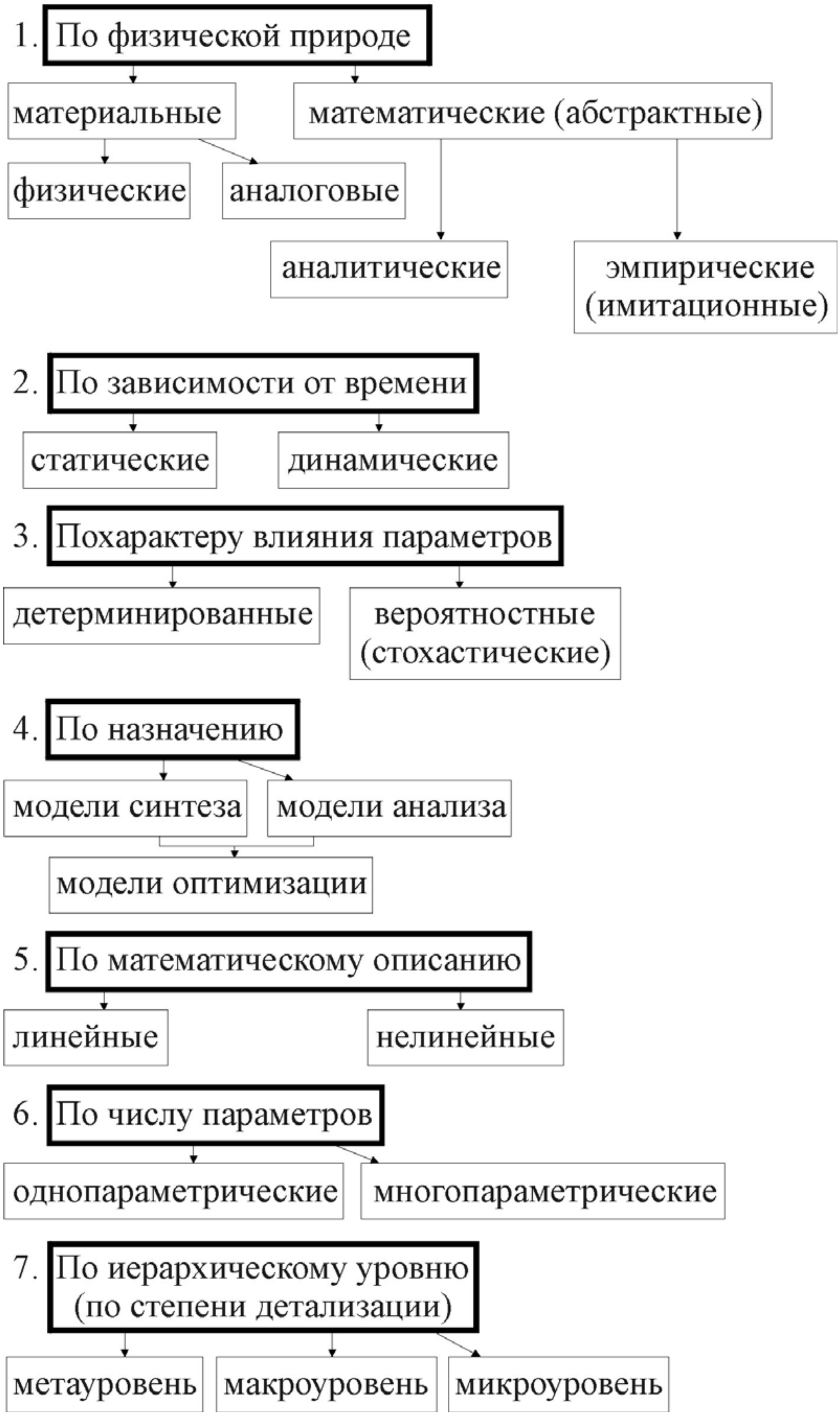



Схема 1 – Классификация моделей по основным признакам

ММ системы может быть представлена в виде **аналитической модели, алгоритмической** или **цифровой**.

Сначала создается аналитическая модель, представляющая замкнутую систему дифференциальных, алгебраических и трансцендентных уравнений, описывающих функционирование технической системы. Затем на ее основе с помощью численных методов разрабатывается моделирующий алгоритм, описывающий преобразования входных данных в выходные. В результате получается алгоритмическая модель. Программная реализация алгоритмической модели представляет собой цифровую модель.

Выделяют следующие **основные методы** исследования ММ: графические, аналитические и численные.

При **графическом** методе исследование ММ проводится путем графического построения. При **аналитическом** – зависимости искомых величин стремятся получить в общем виде. **Численные** методы используются тогда, когда нет возможности решить уравнение ММ в общем виде, но все же можно получить их числовое решение при конкретных исходных данных.

## Вопросы для самопроверки

1 Дайте понятие объекта и его модели. Проведите классификацию моделей.

2 Какова роль моделирования в процессах познавательной и практической деятельности человека?

3 Дайте понятие и определение ММ.

4 Назовите как проводится оценка соответствия между объектом и его ММ.

5 Дайте классификацию ММ.

6 Какова роль математического моделирования в ускорении социального и научно-технического процесса?

7 Назовите и охарактеризуйте методы исследования ММ.

## 2 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**Вопросы.** Основные этапы решения задач на ЭВМ. Описание объектов моделирования. Упрощение (идеализация) объекта. Закономерности, действующие в области применения модели. Способы математической формулировки этих закономерностей. Построение ММ эволюции объекта. Методы исследования ММ на полноту, непротиворечивость и корректность (исследования существования и единственности решений, устойчивости по отношению к возмущениям входных параметров). Методы преобразования ММ (дискретизация, линеаризация, разложение по степеням малых параметров, пренебрежение влиянием несущественных факторов и пр.). Качественное исследование ММ, его назначение и методы осуществления. Методы реализации ММ (аналитические, численные, аналоговые). Применение пакетов прикладных программ. Способы оценки адекватности, универсальности и экономичности ММ.

При решении задачи на ЭВМ основная роль принадлежит человеку. Машина лишь выполняет его задания по разработанной программе. Роль человека и машины легко уяснить, если процесс решения **задачи разбить на этапы**.

**Постановка задачи.** Этот этап заключается в содержательной (физической) постановке задачи и определении конечных целей решения.

**Построение ММ** (математическая формулировка задачи). Модель должна правильно (адекватно) описывать основные законы физического процесса, т. е. она должна достаточно точно (в рамках допустимых погрешностей) отражать характерные черты явления. Вместе с тем она должна обладать сравнительной простотой и доступностью исследования. Известно большое количество ММ различных процессов или явлений. Укажем некоторые из них, широко используемые в механике. Модель абсолютно твердого тела позволила получить уравнения движения тел в динамике полета. Модель идеального газа привела к системе уравнений Эйлера, описывающей невязкие потоки газов. В гидродинамике широко известна модель на основе уравнений Навье-Стокса, в кинетической теории газов уравнения Больцмана и т. д.

Имеются ММ и для описания задач экономики, социологии, медицины, лингвистики и др.

Адекватность и сравнительная простота модели не исчерпывают предъявленных к ней требований. Необходимо также правильно оценивать область применения ММ. Например, модель свободно падающего тела, в которой пренебрегают сопротивлением воздуха, весьма эффективна для твердых тел с большой средней плотностью и формой поверхности, близкой к сферической. Вместе с тем в ряде случаев (движение капельки жидкости, парашютного устройства и др.) для решения задачи уже недостаточно известных из курса физики простейших формул. Здесь необходимы более сложные ММ, учитывающие сопротивление воздуха и другие факторы.

Необходимо отметить, что успех решения задачи в значительной степени определяется выбором ММ, а здесь в первую очередь нужны глубокие знания в той области, к которой принадлежит поставленная задача. Кроме того, необходимы знания соответствующих разделов математики и возможностей ЭВМ.

**Разработка численного метода.** Поскольку ЭВМ может выполнять лишь простейшие операции, она «не понимает» постановки задачи, даже в математической формулировке. Для ее решения должен быть найден численный метод, позволяющий свести задачу к некоторому вычислительному алгоритму.

**Разработка алгоритма и построение блок-схемы.** Процесс решения задачи записывается в виде последовательности элементарных арифметических и логических операций, приводящей к конечному результату и называемой алгоритмом решения задачи. Алгоритм чаще всего изображается в виде блок-схемы.

**Программирование.** Алгоритм решения задачи записывается на понятном машине языке в виде точно определенной последовательности операций – программы для ЭВМ. Составление программы (программирование) обычно производится с помощью некоторого промежуточного (алгоритмического) языка, а ее трансляция (перевод на язык ЭВМ) осуществляется самой вычислительной системой.

**Отладка программы.** Отладка программы на машине включает контроль программы, диагностику (поиск и определение содержания) ошибок, их исправление. Программа испытывается на решении контрольных (тестовых) задач для получения уверенности в достоверности результатов.

**Проведение расчетов.** На этом этапе готовятся исходные данные для расчетов, и проводится счет по отлаженной программе. При этом для уменьшения ручного труда по обработке результатов можно широко использовать удобные формы выдачи результатов, например, распечатку таблицы, построение графиков.

**Анализ результатов.** Результаты расчетов тщательно анализируются, оформляется научно-техническая документация.

Следует отметить еще один важный момент в процессе решения задачи с помощью ЭВМ. Это – **рациональность** выбранного способа решения задачи, численного метода, модели, ЭВМ. В частности, если задача допускает простое арифметическое решение или измерение, то, вряд ли целесообразно привлекать вычисления на ЭВМ. Иногда решение задачи производят с помощью большого вычислительного комплекса, хотя это можно было осуществить с использованием мини-ЭВМ или даже микрокалькулятора.

Множество типов ММ различных систем можно условно подразделить на модели анализа и синтеза. Модели синтеза ориентированны на определение параметров создаваемого объекта, включая те, которые описывают физические эффекты, лежащие в основе его функционирования.

Модели анализа служат для определения свойств и исследования работоспособности объектов при известных значениях параметров. При одновариантном анализе задаются конкретные значения внутренних и входных параметров в модели и определяются значения входных параметров, соответствующих этим параметрам.

Многовариантный анализ предполагает определение множества значений выходных параметров для совокупности заданных значений внутренних и входных параметров. Одновариантный анализ при этом выполняется многократно.

Модели синтеза подразделяются на модели **структурного** и **параметрического** синтеза. Целью структурного синтеза является определение структуры объекта – перечня типов элементов, составляющих объект, и способов связи элементов между собой в составе объекта. Параметрический синтез заключается в определении числовых значений параметров элементов объекта при заданных структуре и условиях работоспособности на выходные параметры объекта. Если при решении задачи синтеза ставится цель обеспечения при этом наилучшего значения некоторого показателя качества, то такая модель является моделью **оптимизации**.

**Вопросы для самопроверки**

1 Назовите и дайте характеристику основным этапам решения задач на ЭВМ.

2 Дайте понятие описания объекта, а также его идеализации.

3 Какие закономерности действуют в области применения модели?

4 Назовите и дайте понятие способов математической формулировки закономерностей действующих в области применения моделей.

5 Дайте понятие методов исследования ММ на полноту, непротиворечивость и корректность.

6 Поясните методы преобразования ММ.

7 Для чего проводится качественное исследование ММ? Методы его проведения.

8 Дайте понятие методов реализации ММ.

9 Назовите и поясните способы оценки адекватности, универсальности и экономичности ММ.

# 3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ НА ЭВМ

**Вопросы.** Аппроксимация функции и ее практическое использование. Понятие об аппроксимации функций. Точечная и интегральная аппроксимация. Интерполирование. Линейная и квадратичная интерполяция. Экстраполяция. Подбор эмпирических формул. Определение параметров эмпирической зависимости. Метод наименьших квадратов.

Системы линейных и нелинейных уравнений и их практическое использование. Основные понятия линейных и нелинейных уравнений и их систем. О методах решения линейных систем. Прямые методы – метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки. Итерационные методы – метод Гаусса-Зейделя. О методах решения нелинейных уравнений и их систем. Методы деления отрезка пополам, хорд, простой итерации, Ньютона.

Дифференцирование и интегрирование в практических задачах. Аппроксимация производных. Погрешность численного дифференцирования. Частные производные. Понятие численного интегрирования. Методы прямоугольников и трапеции. Метод Симпсона. Кратные интегралы. Основные понятия о дифференциальных и интегральных уравнениях. Методы решения дифференциальных уравнений – разностные методы, метод стрельбы, метод конечных разностей.

На практике известны три основных способа задания функций: **аналитический**, **графический**, **табличный**. В практике вычислений на ЭВМ использование графического способа задания функций практически невозможно, а аналитического иногда затруднительно, вследствие громоздкости зависимости $Y = f(X)$ (например, она содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы, дифференциалы и т. п.). Поэтому в данных случаях, с точки зрения экономии времени и средств, приходят к необходимости использования табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра $Y$ при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра $X$, поскольку точная связь $Y = f(X)$ в промежуточных точках неизвестна.

Этой цели и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию $f(X)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(X)$ так, чтобы отклонение $\varphi(X)$ от $f(X)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(X)$ при этом называется **аппроксимирующей**.

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $X_i$, то аппроксимация называется **точечной**. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке) аппроксимация называется **непрерывной** или **интегральной**.

К точечной аппроксимации относится **интерполирование**. Интерполяцию в свою очередь подразделяют на **кусочную** (или **локальную**) и **глобальную**. Если интерполирование проводится для отдельных участков рассматриваемого интервала изменения определяющего параметра $X$, то в этом случае имеют кусочную интерполяцию. Если интерполирование проводится для всего интервала изменения $X$, то говорят о глобальной интерполяции.

Как правило, интерполяция используется для аппроксимации функции в промежуточных точках между крайними узлами интерполяции. Однако иногда она используется и для приближенного вычисления функций вне рассматриваемого отрезка, заключенного между крайними точками. Такое приближение называется **экстраполяцией**.

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является **линейная интерполяция**. Она состоит в том, что заданные соседние точки соединяются прямолинейными отрезками, и задаваемая функция приближается ломаной с вершинами в данных точках. Уравнения $Y = aX + b$ каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить отрезок $[X_{i-1}, X_i]$, на который попадает значения аргумента $X$, а затем подставить его в соответствующее уравнение для вычисления $Y$ и найти приближенное значение функции в этой точке.

Геометрические пояснения линейной интерполяции и параметров уравнения $a$ и $b$ приведены на рисунке 1.

Локальная **квадратичная интерполяция** проводится аналогично, но по трем точкам на отрезке $[X_{i-1}, X_{i+1}]$. В качестве интерполяционной функции в данном случае на каждом из отрезков принимается квадратичный трехчлен $Y = aX^2 + bX + c$. Такую интерполяцию еще называют параболической. Так как уравнение квадратного трехчлена содержит три неизвестных коэффициента *a,b,c* для определения которых необходимо решать систему трех уравнений. Указанная система записывается исходя из условия прохождения параболы через три точки $(X_{i-1}, Y_{i-1}), (X_i, Y_i), (X_{i+1}, Y_{i+1})$.

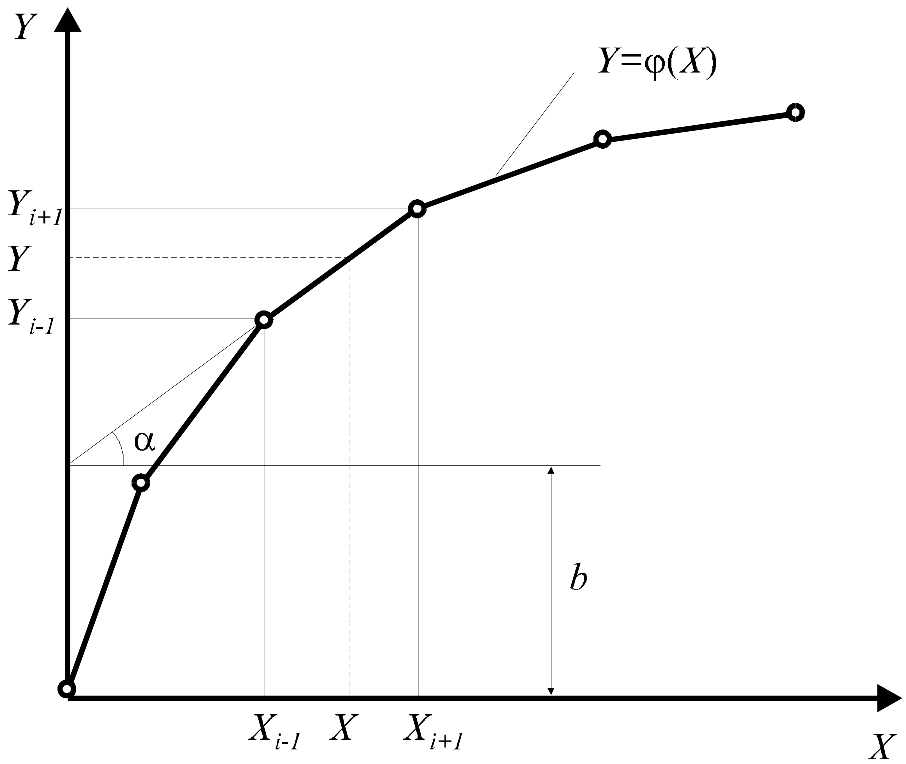



Рисунок 1 – Линейная интерполяция функций

При $X_{i-1} < X < X_{i+1}$ $Y = a\,X + b$,

где $a = \text{tg}(\alpha) = (Y_i - Y_{i-1}) / (X_i - X_{i-1})$;

$b = Y_{i-1} - a \cdot X_{i-1}$.

Тогда эту систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$aX^2_{(i-1)} + bX_{i-1} + c = Y_{i-1};$$

$$aX_i^2 + bX_i + c = Y_i;$$

$$aX^2_{i+1} + bX_{i+1} + c = Y_{i+1}.$$

Как видим, при интерполяции основным условием является прохождение графика аппроксимирующей функции через данные значения функции в узлах интерполяции. Однако это предъявляет высокие требования к точности данных значений функции. В случае обработки опытных данных, полученных в результате наблюдения или измерения, нужно иметь в виду ошибки этих данных. Поэтому не всегда представляется целесообразным определение формулы, в которую входили бы все экспериментальные точки. В данном случае наиболее целесообразно проводить **непрерывную** или **интегральную аппроксимацию**, т. е. построить **эмпирическую формулу** задаваемой функции.

Задача построения эмпирической формулы отличается от задачи интерполирования. График эмпирической зависимости не проходит через заданные точки, как в случае интерполяции. Это приводит к тому, что экспериментальные данные в некоторой степени сглаживаются, а интерполяционная формула не повторит все ошибки, имеющиеся в экспериментальных данных.

Приближённая функциональная зависимость между функцией $Y$ и исходными параметрами $x_i(i = 0 ..., n)$, полученная на основании экспериментальных данных, называется **эмпирической формулой**.

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов:

1) подбор общего вида этой формулы;

2) определение наилучших значений содержащихся в ней параметров.

Пусть в экспериментальных исследованиях проведено $N$ опытов (измерений), в результате которых в табличном виде получена зависимость величины $Y$ от $X$. При нанесении табличных данных на график в координатах $Y$–$X$ может оказаться, что все точки ложатся вблизи прямой линии, уравнение которой в общем виде записывается следующим образом:

$$Y = aX + b,$$

где $a$ и $b$ – неизвестные пока ещё коэффициенты. Подбор этих коэффициентов в указанной линейной модели и является задачей линейной аппроксимации результатов экспериментов.

На практике для определения этих параметров наиболее часто используется метод **наименьших квадратов**.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в таком подборе коэффициентов $a$ и $b$ для выбранной линейной модели, чтобы сумма квадратов отклонений (невязок) $E$ была минимальной. Под отклонением (или невязкой) $E$ понимается разность между значением $Y$, полученным в опыте, и теоретическим значением, рассчитанным по уравнению прямой после подстановки в него соответствующего $X$:

$$E = Y - (aX + b).$$

Следовательно, необходимо минимизировать сумму:

$$S = \sum [Y_i - (aX_i + b)]^2 \to \min,$$

где $i$ – порядковый номер опыта.

В полученном уравнении два неизвестных – $a$ и $b$, поэтому надо иметь систему из двух уравнений для их определения.

Из высшей математики известно, что экстремум (минимум или максимум) функции находится в той точке, где производная этой функции равна нулю. Поэтому дифференцируем указанное уравнение, считая $a$ и $b$ аргументами функции, и приравниваем производные к нулю:

$$\frac{dS}{db} = 2\Delta \sum [Y_i - (aX_i + b)] = 0,$$

$$\frac{dS}{da} = 2\,\Delta \sum [Y_i - (a\,X_i + b)]X_i = 0.$$

Раскрывая в полученной системе скобки, получаем:

$$bN + a\sum X_i = \sum Y_i \,,$$

$$b\sum X_i + a\sum X_i^2 = \sum (X_i Y_i) \,.$$

Для удобства последующих записей индексы ($i$) при переменных $X$ и $Y$ опустим. Из первого уравнения системы получим:

$$b = \left(\sum Y - a\sum X\right)/\,N \,.$$

Подставляем полученное $b$ во второе уравнение системы и из него получим:

$$a = \frac{\sum X \sum Y - N\sum (XY)}{\left(\sum X\right)^2 - N\sum (X^2)} \,.$$

Произведя последовательно расчёт по последней и предпоследней формулам, получаем искомые коэффициенты линейной модели, обеспечивающие минимальную сумму квадратов отклонений.

Однако не всегда результаты экспериментов удовлетворяют линейной модели, но близки к каким-либо простейшим нелинейным моделям, описывающим функциональную зависимость между $Y$ и $X$. В этом случае возникает необходимость линеаризации таких нелинейных моделей.

Допустим, что табличные данные, нанесённые на график в координатах $Y$–$X$, располагаются вблизи линии, которая аналитически может быть описана экспоненциальной функцией:

$$Y = b\exp(aX) \,.$$

Прологарифмировав обе части этого уравнения, получим:

$$\mathrm{Ln}(Y) = \mathrm{Ln}(b) + aX \,.$$

Если теперь обозначить:

$$U = \mathrm{Ln}(Y);$$

$$A_0 = \mathrm{Ln}(b);$$

$$A_1 = a;$$

$$Z = X,$$

то можем записать:

$$U = A_1 Z + A_0.$$

Следовательно, формулы, записанные в предыдущей строке, являются линеаризирующими для экспоненциальной модели.

Сравнивая полученную модель с линейной, видно, что обе эти модели принципиально ни чем не отличаются и описывают прямые линии в координатах $U$–$Z$ и $Y$–$X$ соответственно. Поэтому для неизвестных здесь коэффициентов $A_0$ и $A_1$ по аналогии с формулами, в которых проводится вычисление $a$ и $b$, можем записать:

$$A_1 = \frac{\sum Z \sum U - N \sum (ZU)}{\left(\sum Z\right)^2 - N \sum (Z^2)};$$

$$A_0 = \left(\sum U - A_1 \sum Z\right) / N;$$

Тогда для исходной экспоненциальной модели неизвестные коэффициенты $a$ и $b$ могут быть рассчитаны из линеаризующих формул следующим образом:

$$a = A_1;$$

$$b = \exp(A_0).$$

Подобным образом можно провести линеаризацию и многих других простейших нелинейных моделей. Наиболее часто встречающиеся из них и соответствующие им преобразования к виду линейной модели сведены в таблице 1.

Для оценки степени отклонения полученной модели $U(Z)$ от линейной используется коэффициент парной корреляции $R$, рассчитываемый по формуле:

$$R = \frac{N\sum(ZU) - \left(\sum Z \sum U\right)}{\sqrt{N\sum(Z^2) - \left(\sum Z\right)^2}\sqrt{N\sum(U^2) - \left(\sum U\right)^2}}.$$

Его значение может изменяться в диапазоне $R = -1 \ldots +1$.

Если по абсолютной величине значение $R$ близко к 1, то эта связь линейная и адекватно (правильно) описывается полученной моделью. Причём знак $R$ определяет и знак коэффициента $A_1$.

Если $R < 0$, то и $A_1 < 0$, следовательно, функция $U(Z)$ убывающая, в противном случае – функция возрастающая. Если коэффициент корреляции близок к нулю, то наличие линейной связи $U$–$Z$ отвергается, хотя из этого не следует отсутствие любой другой нелинейной связи. Поэтому оценивать адекватность принятой модели по коэффициенту корреляции можно только после её линеаризации. При оценке линейной модели в расчётной формуле коэффициента парной корреляции вместо $U$ и $Z$ необходимо использовать $Y$ и $X$ соответственно.

Таблица 1 – Линеаризация простейших нелинейных моделей

| № | Функция | $U$ | $A_0$ | $A_1$ | $Z$ | $b$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $b\exp(aX)$ | $\mathrm{Ln}(Y)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $X$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 2 | $bX\exp(aX)$ | $\mathrm{Ln}(Y/X)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $X$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 3 | $b\exp(a/X)$ | $\mathrm{Ln}(Y)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $1/X$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 4 | $bX^2\exp(aX)$ | $\mathrm{Ln}(Y/X^2)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $X$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 5 | $b\exp(aX^2)$ | $\mathrm{Ln}(Y)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $X^2$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 6 | $bX\exp(aX^2)$ | $\mathrm{Ln}(Y/X)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $X^2$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 7 | $bX^a$ | $\mathrm{Ln}(Y)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $a$ | $Ln(X)$ | $\exp(A_0)$ | $A_1$ |
| 8 | $ba^X$ | $\mathrm{Ln}(Y)$ | $\mathrm{Ln}(b)$ | $Ln(a)$ | $X$ | $\exp(A_0)$ | $\exp(A_1)$ |
| 9 | $b+(a/X)$ | $Y$ | $b$ | $a$ | $1/X$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 10 | $1/(b+aX)$ | $1/Y$ | $b$ | $a$ | $X$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 11 | $X/(b+aX)$ | $X/Y$ | $b$ | $a$ | $X$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 12 | $b/(a+X)$ | $1/Y$ | $a/b$ | $1/b$ | $X$ | $1/A_1$ | $A_0/A_1$ |
| 13 | $bX/(a+X)$ | $1/Y$ | $1/b$ | $a/b$ | $1/X$ | $1/A_0$ | $A_1/A_0$ |
| 14 | $b+aX^2$ | $Y$ | $b$ | $a$ | $X^2$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 15 | $X^2/(b+aX)$ | $X^2/Y$ | $b$ | $a$ | $X$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 16 | $1/(b+aX^2)$ | $1/Y$ | $b$ | $a$ | $X^2$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 17 | $X/(b+aX^2)$ | $X/Y$ | $b$ | $a$ | $X^2$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 18 | $X^2/(b+aX^2)$ | $X^2/Y$ | $b$ | $a$ | $X^2$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 19 | $1/(b+a\exp(X))$ | $1/Y$ | $b$ | $a$ | $\exp(X)$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 20 | $X/(b+a\exp(X))$ | $X/Y$ | $b$ | $a$ | $\exp(X)$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 21 | $b+a\ln(X)$ | $Y$ | $b$ | $a$ | $\ln(X)$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 22 | $b+a/X^2$ | $Y$ | $b$ | $a$ | $1/X^2$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 23 | $\sqrt{b+aX}$ | $Y^2$ | $b$ | $a$ | $X$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 24 | $X\sqrt{b+aX}$ | $(Y/X)^2$ | $b$ | $a$ | $X$ | $A_0$ | $A_1$ |
| 25 | $\sqrt{X/(b+aX)}$ | $X/Y^2$ | $b$ | $a$ | $X$ | $A_0$ | $A_1$ |

**Определение номера варианта индивидуального задания**

Задания выбираются по вариантам, соответствующим двум последним цифрам учебного шифра (номера зачетной книжки) согласно таблице 10.

Таблица 10 – Выбор варианта по последним цифрам учебного шифра

| Шифр, *n* | 01–25 | 26–50 | 51–75 | 76–00 |
|---|---|---|---|---|
| Вариант | *n* | *n*–25 | *n*–50 | *n*–75 |

*Примечание* – *n* – число, соответствующее двум последним цифрам учебного шифра студента.

***Примеры выбора номера варианта*:** для шифра 21 – вариант = *n* = 21; для шифра 42 – вариант = 42 – 25 = 17;

для шифра 57 – вариант = 57 – 50 = 7;

для шифра 95 – вариант = 95 – 75 = 20;

для шифра 00 – вариант = 100 – 75 = 25.

В таблицах по вариантам представлены опытные данные, вид функции аппроксимации и значение $X$, для которого необходимо отыскать $Y$ одним из методов аппроксимации.

**Порядок выполнения работ**

1 Изучить теоретический материал, выполнив приведенные примеры.

2 Выполнить индивидуальное задание.

3 Представить отчет, который включает описание задачи, метод ее решения и анализ результатов.

4 Защитить выполненную работу.

**Задание 1**

Пусть в результате исследований зависимости величины $Y$ от $X$ получены следующие данные (таблица 2). Используя эти табличные данные, провести точечную аппроксимацию зависимости, сначала используя локальную линейную интерполяцию и глобальную интерполяцию степенным многочленом, а затем непрерывную аппроксимацию нелинейной функцией указанного вида и степенным многочленом. Найти теоретические значения $Y$ по проведённым аппроксимациям для заданного $X$.

Таблица 2 – Пример задания (результаты экспериментальных исследований)
Вид функции аппроксимации: $Y = b\,exp(aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,567 | 1,209 | 1,85 | 2,417 | 3,059 | 3,7 | 4,267 | 4,908 | 5,55 | 6,191 |
| $Y$ | 0,154 | 0,38 | 0,495 | 0,604 | 0,921 | 1,15 | 1,67 | 2,27 | 3,174 | 4,542 |

Найти $Y$ при $X$ = 3,38

### Методические указания к выполнению задания 1

Для проведения линейной интерполяции проведём разработку блок-схемы алгоритма (рисунок 2), в которой будет проводиться выбор $i$-го отрезка ломаной линии, на который попадает заданное значение аргумента $X$ (блоки 2, 6), определение значений коэффициентов $a$ и $b$ уравнений описывающих эти отрезки (блоки 7, 8). Так как эти операции проводятся в цикле, то для его организации используется блок модификации 4. Ввод значения параметров $X_i$ и $Y_i$ проводится в блоке 1, при этом значения аргумента $X_1 - X_{10}$ вводятся в порядке возрастания. Вычисление $Y$ и вывод результатов вычисления проводится, соответственно, в блоках 9 и 10. Блоки 3 и 5 используются для выдачи сообщения, когда заданное значение $X$ выходит за границы эксперимента.

На основании разработанного алгоритма составлена программа на **Pascal** и **Basic** для проведения линейной интерполяции на ЭВМ (программа 1 и 2). Последовательность её операторов соответствует разработанной блок-схеме алгоритма.

Для проведения аппроксимации указанной нелинейной функцией необходимо определить неизвестные её коэффициенты $a$ и $b$ и коэффициент парной корреляции $R$ по приведённым выше формулам.

В разработанной блок-схеме алгоритма (рисунок 3), которая приведена ниже и в программе на языке **Pascal** и **Basic** (программа 3 и 4) для ЭВМ использованы следующие обозначения, отличающиеся от принятых в математических формулах:

$$S_1 = \sum Z_i;$$

$$S_2 = \sum U_i;$$

$$S_3 = \sum Z_i^2;$$

$$S_4 = \sum U_i^2;$$

$$S_5 = \sum (Z_i \cdot U_i).$$

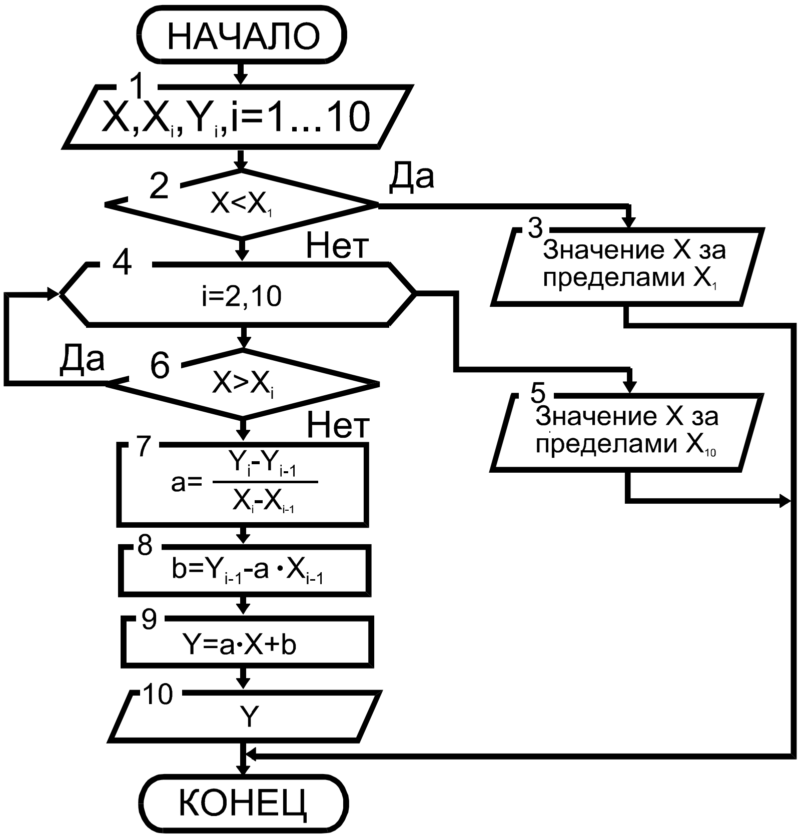



Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма линейной интерполяции

В блоке 1 на схеме осуществляется ввод числа опытов *N*, в блоках 2–6 – обнуление всех переменных, используемых для накопления сумм. Блок 7 организует цикл, параметром которого является *i* (порядковый номер опыта). Телом этого цикла являются блоки 8–14.

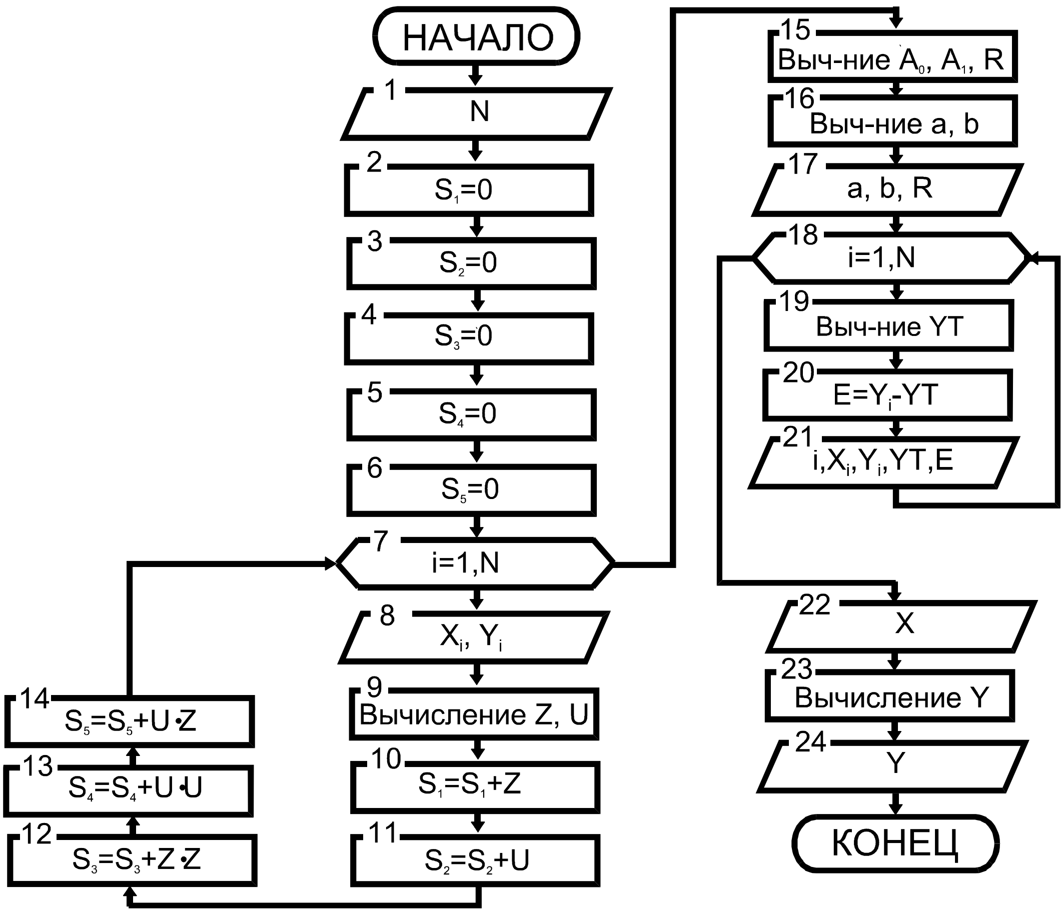



Рисунок 3 – Блок-схема алгоритма аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой

В блоке 8 осуществляется попарный ввод результатов эксперимента *X* и *Y* в этом опыте. В блоке 9 рассчитываются линеаризованные параметры *Z* и *U* по формулам, приведённым в таблице 1 для указанной функции. Накопление всех сумм осуществляется в блоках 10–14. После цикла в блоке 15 проводится расчёт коэффициентов $A_0$, $A_1$ и *R*. Блок 16 реализует расчёт коэффициентов *a* и *b* исходной функции. Далее блок 17 организует распечатку полученных коэффициентов *a*, *b* и *R*, а блок 18 – цикл с тем же параметром 1. В этом цикле для каждого опыта производится расчёт *Y*-ков по указанной функции аппроксимации с учётом полученных значений *a* и *b* (блок 19), расчёт невязки *E* (блок 20) и распечатка таблицы исходных данных и полученных *Y* и *E* (блок 21). После цикла проводится ввод значения аргумента функции X для которого необходимо определить *Y* (блок 22), затем расчёт значения функции *Y* (блок 23) и её печать (блок 24). Программа 3 и 4 реализует данный алгоритм. Последовательность её операторов соответствует блок-схеме алгоритма.

Пример выполнения аппроксимации функции линейной интерполяцией на языке **Pascal**.

Программа 1

```
var x,y : array [1..10] of real;
 i,n : integer;
 xz,yz,a,b:real;
 label 1,2;
begin
 write('n=');
 readln(n);
 writeln('Введите значение x и y для каждого опыта');
 for i:=1 to n do readln(x[i],y[i]);
 writeln('----------------------------------------');
 writeln('| i  |  x  |  y  |');
 writeln('----------------------------------------');
 for i:=1 to n do writeln(i,x[i],y[i]);
 writeln('введите xz=');
 readln(xz);
 if xz<x[1] then writeln('xz лежит левей отрезка') else
 begin
  for i:=2 to n do
  begin
   if xz>x[i] then goto 1 else
   begin
    a:=(y[i]-y[i-1])/(x[i]-x[i-1]);
    b:=y[i-1]-a*x[i-1];
    yz:=a*xz+b;
    writeln('yz=',yz);
    goto 2;
   end;
1:  end;
  writeln('xz правей отрезка');
2: end;
 readln;
end.
```

Пример выполнения аппроксимации функции линейной интерполяцией на языке на **Basic**.

Программа 2

```
10 DIM X(10), Y(10)
20 DATA 0.567,0.154,1.209,0.38,1.85,0.495,2.417,0.604,3.059,0.921
30 DATA 3.7,1.15,4.267,1.67,4.908,2.27,5.55,3.174,6.191,4.542
40 FOR I=1 TO 10
50 READ X(I),Y(I)
60 NEXT I
70 PRINT "ВВЕДИТЕ ЗАДАННОЕ ЗНАЧЕНИЕ X"
80 INPUT X
90 IF X<X(1) THEN 210
100  FOR I=2 TO 10
110  IF X>X(I) THEN 160
120  A=(Y(I)-Y(I-1))/(X(I)-X(I-1))
130  B=Y(I-1)-A*X(I-1)
140  Y=A*X+B
150  GOTO 190
160  NEXT I
170  PRINT "ЗНАЧЕНИЕ X ЗА ПРЕДЕЛАМИ X10"
180  GOTO 220
190  PRINT "Y="Y
200  GOTO 220
210  PRINT "ЗНАЧЕНИЕ X ЗА ПРЕДЕЛАМИ X1"
220  END
```

Пример выполнения аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой на языке **Pascal**.

Программа 3

```
var x,y : array[1..10] of real;
 i,n : integer;
 a,b,a1,a0,s1,s2,s3,s4,s5,r,u,z,xz,yz,yt,e : real;
Begin
 write('n=');
 readln(n);
 s1:=0; s2:=0; s3:=0; s4:=0; s5:=0;
 writeln('Введите значение X и Y для каждого опыта');
 for i:=1 to n do
 Begin
  write('опыт ',i,' ');
  readln(x[i],y[i]);
  z:=x[i]; u:=ln(y[i]);
  s1:=s1+z; s2:=s2+u;
  s3:=s3+z*z; s4:=s4+u*u;
  s5:=s5+u*z;
 end;
 a1:=(s1*s2-n*s5)/(s1*s1-n*s3);
 a0:=(s2-a1*s1)/n;
 r:=-(s1*s2-n*s5)/(sqrt(n*s3-s1*s1)*sqrt(n*s4-s2*s2));
 b:=exp(a0);
 a:=a1;
 writeln('a=',a,' b=',b);
 writeln('r=',r);
 writeln('-----------------------------------------');
 writeln('| x |  y |  yt | e |');
 writeln('-----------------------------------------');
 for i:=1 to n do
 Begin
  yt:=b*exp(a*x[i]);
  e:=y[i]-yt;
  writeln(i,x[i],y[i],yt,e);
 end;
 writeln('-----------------------------------------');
 writeln('введите заданное значение x=');
 readln(xz);
 writeln('y=',b*exp(a*xz));
 readln;
end.
```

Пример выполнения аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой на языке на **Basic**.

Программа 4

```
10 INPUT "ЗАДАЙТЕ ЧИСЛО ОПЫТОВ"; N
20 DIM X(N), Y(N)
30 S1=0
40 S2=0
50 S3=0
60 S4=0
70 S5=0
80 PRINT "ВВЕДИТЕ ЗНАЧЕНИЯ X и Y ДЛЯ КАЖДОГО ОПЫТА"
90 FOR I=1 TO N
100 PRINT "ОПЫТ";I,
110 INPUT X(I), Y(I)
120 Z=X(I)
130 U=LOG(Y(I))
140 S1=S1+Z
150 S2=S2+U
160 S3=S3+Z*Z
170 S4=S4+U*U
180 S5=S5+Z*U
190 NEXT I
200 A1=(S1*S2-N*S5)/(S1^2-N*S3)
210 A0=(S2-A1*S1)/N
220 R=-(S1*S2-N*S5)/(SQR(N*S3-S1^2)*SQR(N*S4-S2^2))
230 B=EXP(A0)
240 A=A1
250 PRINT "A="A, "B="B
260 PRINT "R="R
270 PRINT "-----------------------------------------------"
280 PRINT " I X  Y   YT   E  "
290 PRINT "-----------------------------------------------"
300 FOR I=1 TO N
310 YT=B*EXP(A*X(I))
320 E=Y(I)-YT
330 PRINT I; X(I), Y(I), YT, E
340 NEXT I
350 PRINT "-----------------------------------------------"
360 INPUT "ВВЕДИТЕ ЗАДАННОЕ ЗНАЧЕНИЕ X";X
370 PRINT "Y="B*EXP(A*X)
380 END
```

Пример выполнения аппроксимации функции линейной интерполяцией в пакете **Matlab.**

До начала выполнения задания необходимо сделать активной (текущей) свою папку. Например, **FIO**. Для этого в главном окне **Matlab** рядом со строкой **Current Directory** (Текущая директория) нажать кнопку с многоточием, расположенную справа от раскрывающегося списка. Откроется окно **Browse for Folder**, с помощью которого следует найти диск **X** и свою папку **FIO**. Выделить ее и нажать **ОК**. В текстовом поле появится имя вашей папки.

Затем в меню **File** выбрать пункты **New → M-file**. В открывшемся окне набрать текст программы линейной интерполяции.

Программа 5

```
x=[0.567 1.209 1.85 2.417 3.059 3.7 4.267 4.908 5.55
6.191];
y=[0.154 0.38 0.495 0.604 0.921 1.15 1.67 2.27 3.174
4.542];
xz=3.38
yz=interp1(x,y,xz)
xi=0.567:0.001:6.191;
yi=interp1(x,y,xi);
plot(x,y,'ko',xi,yi,'b',xz,yz,'R*'); grid on;
axis([0.5 7 0 5.5]);
```

Для сохранения набранного текста программы выбрать **File → Save** и в открывшемся окне **Save file as** в строке **File Name** набрать имя m-файла. Затем нажать кнопку **Save**. Сохраним файл, например, под именем **Lab1_1**. Имя файла набирается только английскими буквами. Знаки точек, запятых и пробелов в имени файла не допускаются. Текст программы можно было набрать и выполнить сразу в командном окне, но тогда бы он не сохранился.

В системе **Matlab** для интерполяции многочленами используется функция `interp1`. Общая форма обращения к ней:

```
Yi=interp1(x,y,xi,metod)
```

Функция возвращает вектор $y_i$ – значения интерполяционного многочлена в точках $x_i$. $x$ и $y$ – векторы узлов из таблицы 2. Опция **method** задает метод интерполяции. Рассмотрим некоторые из них:

`'nearest'` – интерполяция нулевого порядка (ступенчатая);

`'linear'` – интерполяция первого порядка (линейная);

`'cubic'` – интерполяция третьего порядка (кубическая).

Созданный *m*-файл можно запустить на выполнение из командного окна. Для этого в командном окне необходимо набрать:

```
>> Lab1_1
```

В результате выполнения программы будет построен график рисунок 4 и в командном окне отобразится результат:

```
xz =
 3.3800
yz =
 1.0357
```

На графике эта точка обозначена звездочкой.

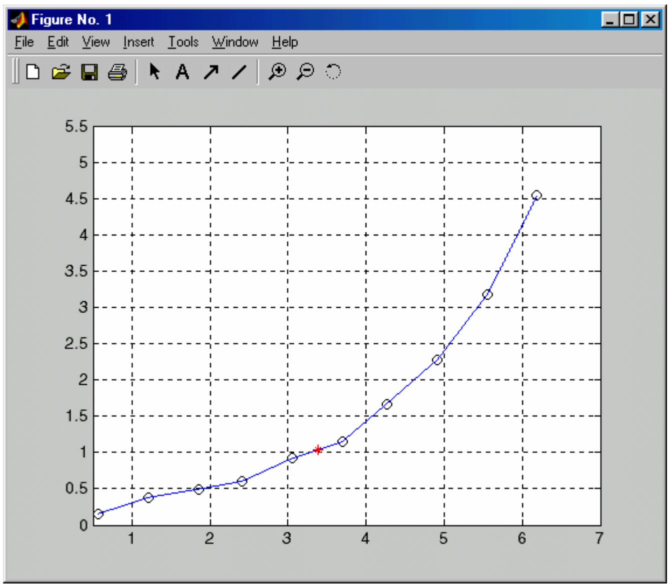



Рисунок 4 – Линейная интерполяция в Matlab

Пример выполнения аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой в пакете **Matlab**

Программа 6

```
x=[0.567 1.209 1.85 2.417 3.059 3.7 4.267 4.908 5.55 6.191];
y=[0.154 0.38 0.495 0.604 0.921 1.15 1.67 2.27 3.174 4.542];
u=log(y); z=x;
cd=polyfit(z,u,1);
a=cd(1); b=exp(cd(2));
yt=b.*exp(a.*x);
e=y-yt;
disp('  x   y   yt   e ');
disp('-----------------------------------------');
disp([x' y' yt' e']);
disp('-----------------------------------------');
B=[z;u]'; D=corrcoef(B); R=D(1,2);
disp('  a   b   R');
disp([a b R]);
xz=3.38; yz=b*exp(a*xz);
disp('  xz  yz'); disp([xz yz]);
plot(x,y,'ko',x,yt,'b',xz,yz,'R*'); grid on;
axis([0.5 7 0 5.5]);
```

В примере программы использованы функции **Matlab**:

1) `p = polyfit(x,y,n)` – возвращает вектор коэффициентов полинома *p(x)* степени n, который с наименьшей среднеквадратичной погрешностью аппроксимирует функцию *y(x).* Результатом является вектор-строка длиной $n+1$, содержащий коэффициенты полинома в порядке уменьшения степеней. Если число элементов векторов *x* и *y* равно $n+1$, то реализуется полиномиальная интерполяция, при которой график полинома точно проходит через узловые точки:

2) `D=corrcoef(B)` – возвращает матрицу коэффициентов корреляции для входной матрицы *B***,** каждая строка которой, например *i*-я, рассматривается как *i*-й опыт, а столбцы – как переменные. В нашем случае матрица *B* будет представлять собой два столбца: первый – значения *X* из таблицы, второй – соответствующие значения *Y*. *D* – квадратная матрица коэффициентов корреляции. Она симметрична относительно главной диагонали. Так как коэффициент кор-

реляции характеризует степень линейной связи между двумя случайными величинами, то в матрице $D$ элемент $d_{ij}$ определяет степень линейной связи между i-ой и j-ой случайными величинами (расположенными в $i$-ом и $j$-ом столбцах матрицы $B$). Очевидно, что $d_{ji} = d_{ij}$, т. к. характеризует связь между $j$-ой и $i$-ой случайными величинами. На главной диагонали (элементы $d_{ii}$) стоят единицы, т. к. они характеризуют связь $i$-ой величины с самой собой.

В нашем случае матрица $D$ имеет размер 2×2, и в качестве коэффициента корреляции можно брать элемент $d_{12}$ или элемент $d_{21}$, которые представляют степень линейной связи между $X$ и У.

В результате выполнения программы будет построен график рисунок 5 и в командном окне отобразится результат:

```
  x        y      yt      e
---------------------------------------------
 0.5670 0.1540 0.2149 -0.0609
 1.2090 0.3800 0.3056 0.0744
 1.8500 0.4950 0.4345 0.0605
 2.4170 0.6040 0.5930 0.0110
 3.0590 0.9210 0.8434 0.0776
 3.7000 1.1500 1.1988 -0.0488
 4.2670 1.6700 1.6362 0.0338
 4.9080 2.2700 2.3258 -0.0558
 5.5500 3.1740 3.3079 -0.1339
 6.1910 4.5420 4.7019 -0.1599
---------------------------------------------

  a        b      R
 0.5486 0.1575 0.9903

  xz      yz
 3.3800 1.0058
```

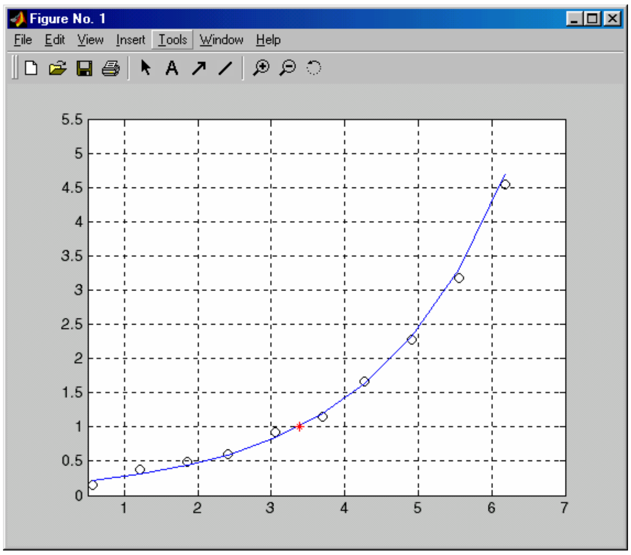



Рисунок 5 – График эмпирической модели y=b*exp(a*x) в Matlab

Пример выполнения аппроксимации функции линейной интерполяцией в пакете Excel. Для решения этой задачи на рабочем листе Excel составим таблицу 3:

Таблица 3 – Исходные данные для аппроксимации функции линейной интерполяцией

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | |
| 2 | 0,567 | 0,154 | |
| 3 | 1,209 | 0,380 | |
| 4 | 1,850 | 0,495 | |
| 5 | 2,417 | 0,604 | |
| 6 | 3,059 | 0,921 | |
| 7 | 3,700 | 1,150 | |
| 8 | 4,267 | 1,670 | |
| 9 | 4,908 | 2,270 | |
| 10 | 5,550 | 3,174 | |
| 11 | 6,191 | 4,542 | |
| 12 | Xz= | 3,38 | |

C2) `=ЕСЛИ(И(B$12>A2;B$12<=A3)=ИСТИНА;`
`(B3-B2)*(B$12-A2)/(A3-A2)+B2;"Вне интервала")`

Содержимое ячейки C2 копируется в блок ячеек C3–C10. Результаты приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Результаты аппроксимации функции линейной интерполяцией

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | |
| 2 | 0,567 | 0,154 | Вне интервала |
| 3 | 1,209 | 0,380 | Вне интервала |
| 4 | 1,850 | 0,495 | Вне интервала |
| 5 | 2,417 | 0,604 | Вне интервала |
| 6 | 3,059 | 0,921 | 1,035679 |
| 7 | 3,700 | 1,150 | Вне интервала |
| 8 | 4,267 | 1,670 | Вне интервала |
| 9 | 4,908 | 2,270 | Вне интервала |
| 10 | 5,550 | 3,174 | Вне интервала |
| 11 | 6,191 | 4,542 | |
| 12 | Xz= | 3,38 | |

Пример выполнения аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой в пакете Excel. Для решения этой задачи на рабочем листе Excel составим таблицу 5:

Таблица 5 – Исходные данные для аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | Yt | |
| 2 | 0,567 | 0,154 | | |
| 3 | 1,209 | 0,380 | | |
| 4 | 1,850 | 0,495 | | |
| 5 | 2,417 | 0,604 | | |
| 6 | 3,059 | 0,921 | | |
| 7 | 3,700 | 1,150 | | |
| 8 | 4,267 | 1,670 | | |
| 9 | 4,908 | 2,270 | | |
| 10 | 5,550 | 3,174 | | |
| 11 | 6,191 | 4,542 | | |
| 12 | a= | 1 | | |
| 13 | b= | 1 | | |
| 14 | Xz= | 3,38 | | |
| 15 | Yz= | | | |

C2) `=B$13*EXP(B$12*A2)`

D2) `=(B2-C2)^2`

Содержимое ячеек C2, D2 копируется в блоки ячеек C3–C11 и D3–D11.

D12) `=СУММ(D2:D11)`

B15) `=B$13*EXP(B$12*B14)`

После внесения формул произойдет расчет ячеек C2–C11, D2–D11 и B15 по начальным значениям коэффициентов *a* и *b* которые располагаются в ячейках B12 и B13.

Таблица 6 – Промежуточные результаты расчета для аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | Yt | |
| 2 | 0,567 | 0,154 | 1,7629702 | 2,588785 |
| 3 | 1,209 | 0,380 | 3,3501328 | 8,821689 |
| 4 | 1,850 | 0,495 | 6,3598195 | 34,39611 |
| 5 | 2,417 | 0,604 | 11,212172 | 112,5333 |
| 6 | 3,059 | 0,921 | 21,30624 | 415,558 |
| 7 | 3,700 | 1,150 | 40,447304 | 1544,278 |
| 8 | 4,267 | 1,670 | 71,307392 | 4849,366 |
| 9 | 4,908 | 2,270 | 135,36841 | 17715,19 |
| 10 | 5,550 | 3,174 | 257,23756 | 64548,29 |
| 11 | 6,191 | 4,542 | 488,3342 | 234054,9 |
| 12 | a= | 1 | | 323285,9 |
| 13 | b= | 1 | | |
| 14 | Xz= | 3,38 | | |
| 15 | Yz= | 29,37077 | | |

Затем в подразделе «Поиск решения» раздела «Сервис» (рисунок 6) главного меню формируем условие оптимизации (минимум целевой функции в ячейке D12) и параметры оптимизации (ячейки изменения B12:B13). После чего проводим запуск на выполнение оптимизации. В результате оптимизации получим таблицу 7.

Для построения графиков выделим блок ячеек A2–C11 и вызовем «Мастер диаграмм». На вкладке «Стандартные» выберем тип диаграммы – «Точечная» и вид – «Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями» (средняя в первом столбце). Руководствуясь указаниями «Мастера диаграмм», построим график и расположим диаграмму на одном листе вместе с результатами расчета (рисунок 7).

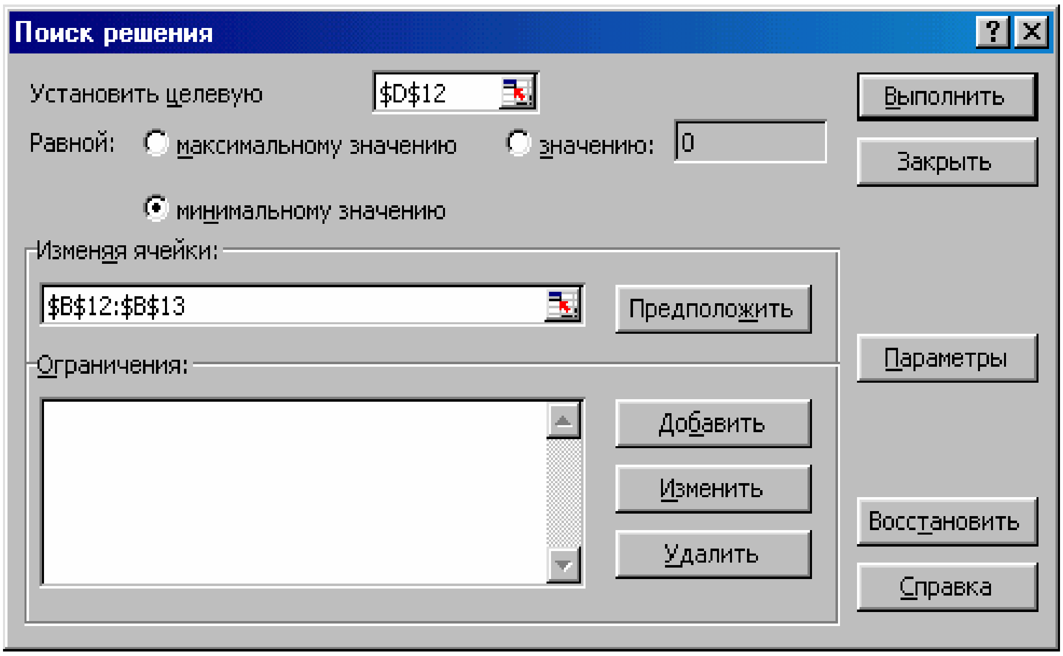



Рисунок 6 – Окно «Поиск решения» раздела «Сервис»

Таблица 7 – Результаты аппроксимации функции простейшей нелинейной эмпирической формулой

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | Yt | |
| 2 | 0,567 | 0,154 | 0,2795076 | 0,015752 |
| 3 | 1,209 | 0,380 | 0,3825643 | 6,58E-06 |
| 4 | 1,850 | 0,495 | 0,5233627 | 0,000804 |
| 5 | 2,417 | 0,604 | 0,6905407 | 0,007489 |
| 6 | 3,059 | 0,921 | 0,9451483 | 0,000583 |
| 7 | 3,700 | 1,150 | 1,2929994 | 0,020449 |
| 8 | 4,267 | 1,670 | 1,706023 | 0,001298 |
| 9 | 4,908 | 2,270 | 2,3339053 | 0,004084 |
| 10 | 5,550 | 3,174 | 3,194434 | 0,000418 |
| 11 | 6,191 | 4,542 | 4,3701092 | 0,029546 |
| 12 | a= | 0,488889 | | 0,08043 |
| 13 | b= | 0,21184 | | |
| 14 | Xz= | 3,38 | | |
| 15 | Yz= | 1,105746 | | |

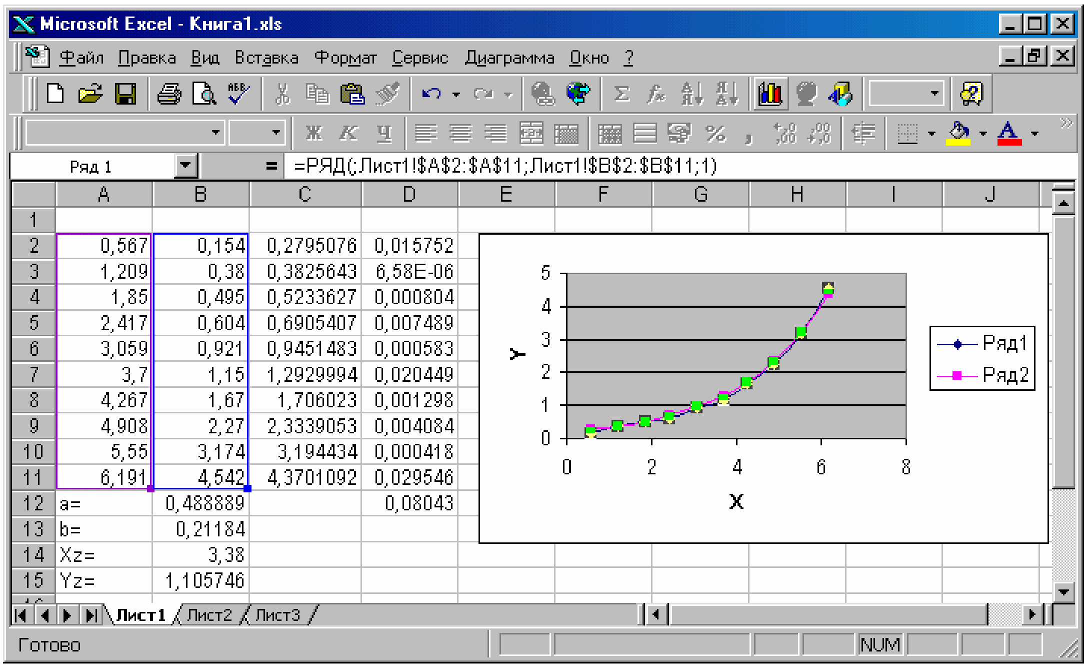



Рисунок 7 – График эмпирической модели с двумя параметрами

Пример глобальной интерполяции задаваемой функции степенным многочленом в пакете Excel (таблица 8).

Таблица 8 – Исходные данные для глобальной интерполяции функции степенным многочленом

| | A | B | C | … | J | K | L | M | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | X | X^2 | … | X^9 | Y | | | Yt |
| 2 | 1 | 0,567 | | … | | 0,154 | $a_0$= | | |
| 3 | 1 | 1,209 | | … | | 0,380 | $a_1$= | | |
| 4 | 1 | 1,850 | | … | | 0,495 | $a_2$= | | |
| 5 | 1 | 2,417 | | … | | 0,604 | $a_3$= | | |
| 6 | 1 | 3,059 | | … | | 0,921 | $a_4$= | | |
| 7 | 1 | 3,700 | | … | | 1,150 | $a_5$= | | |
| 8 | 1 | 4,267 | | … | | 1,670 | $a_6$= | | |
| 9 | 1 | 4,908 | | … | | 2,270 | $a_7$= | | |
| 10 | 1 | 5,550 | | … | | 3,174 | $a_8$= | | |
| 11 | 1 | 6,191 | | … | | 4,542 | $a_9$= | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | Xz= | 3,38 | |
| 15 | | | | | | | Yz= | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | |

C2) `=B2*$B2`

В ячейки N2 и M15 запишем формулы для расчета многочлена 9й степени.

N2) `=(…(B2*M$11+M$10)*B2+M$9)*B2+…+M$3)*B2+M$2`

M15) `=(…(N14*M$11+M$10)* N14+M$9)* N14+…+M$3)* N14+M$2`

Содержимое ячейки C2 копируем в блок ячеек D2–J2, а затем блок ячеек C2–J2 копируем в блок C3–J11. Выделим блок ячеек A12–J21 под обратную матрицу, введем **МОБР(A2 : J11)** и нажмем **Shift+Ctrl+Enter**. Затем выделим блок ячеек M2–M11 под коэффициенты многочлена, введем **МУМНОЖ (A12 : J21 ; K2 : K11)** и нажмем **Shift+Ctrl+Enter**. Содержимое ячейки N2 копируем в ячейки N3–N11.

Пример аппроксимации функции эмпирической формулой в виде степенного многочлена в пакете Excel (таблица 9).

Таблица 9 – Исходные данные для аппроксимации функции эмпирической формулой в виде степенного многочлена

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | X | Y | Yt | |
| 2 | 0,567 | 0,154 | | |
| 3 | 1,209 | 0,380 | | |
| 4 | 1,850 | 0,495 | | |
| 5 | 2,417 | 0,604 | | |
| 6 | 3,059 | 0,921 | | |
| 7 | 3,700 | 1,150 | | |
| 8 | 4,267 | 1,670 | | |
| 9 | 4,908 | 2,270 | | |
| 10 | 5,550 | 3,174 | | |
| 11 | 6,191 | 4,542 | | |
| 12 | Xz= | 3,38 | | |
| 13 | $a_o$= | 1 | | |
| 14 | $a_1$= | 1 | | |
| 15 | $a_2$= | 1 | | |
| 16 | $a_3$= | 0 | | |
| 17 | $a_4$= | 0 | | |
| | … | … | | |
| 25 | $a_{12}$= | 0 | | |

В ячейки C2 и C12 запишем формулы для расчета многочлена 12й степени.

C2) `=B$13+(B$14+A2*(B$15+A2*(B$16+(…(B$24+A2*B$25)…)))))`

C12) `=B$13+(B$14+B12*(B$15+B12*(B$16+(…(B$24+B12*B$25)…)))))`

D2) `=(B2-C2)^2`

Содержимое ячеек C2, D2 копируется в блоки ячеек C3–C11 и D3–D11.

D12) `=СУММ(D2:D11)`

Затем в подразделе «Поиск решения» раздела «Сервис» главного меню формируем условие оптимизации (минимум целевой функции в ячейке D12) и параметры оптимизации (ячейки изменения B13 : B15). После чего проводим запуск на выполнение оптимизации.

Для построения графиков выделим блок ячеек A2–C11 и вызовем «Мастер диаграмм». На вкладке «Стандартные» выберем тип диаграммы – «Точечная» и вид – «Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями» (средняя в первом столбце). Руководствуясь указаниями «Мастера диаграмм», построим график и расположим диаграмму на одном листе вместе с результатами расчета.

Далее в ячейку B16 копируем число из ячейки B15. Затем в подразделе «Поиск решения» раздела «Сервис» главного меню формируем условие оптимизации (минимум целевой функции в ячейке D12) и параметры оптимизации (ячейки изменения B13 : B16). После чего проводим запуск на выполнение оптимизации. По значению ячейки D12 и графику функции контролируется процесс подбора коэффициентов многочлена. Аналогично подбираются коэффициенты многочлена в ячейках B17–B25.

## Вопросы для самопроверки

1 Способы задания функций.

2 Понятие аппроксимации функций.

3 Классификация аппроксимации функций.

4 Сущность и примеры локальной (кусочной) аппроксимации.

5 Сущность и примеры глобальной аппроксимации.

6 Как определить возможность глобальной аппроксимации линейной функцией вида $Y = aX + b$ ?

7 Дайте понятие коэффициента парной корреляции и что он характеризует?

8 Какие существуют методы определения неизвестных параметров аппроксимирующей функции при построении эмпирических формул?

9 Сущность метода наименьших квадратов.

10 К какой задаче сводится определение неизвестных коэффициентов аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов?

11 Как оценивается погрешность аппроксимации?

12 Сущность интерполяции и её виды.

13 В чём отличие интерполяции от построения эмпирических формул?

14 Чем отличается интерполяция от экстраполяции?

## Индивидуальные задания

По заданному варианту провести точечную аппроксимацию зависимости, сначала используя локальную линейную интерполяцию и глобальную интерполяцию степенным многочленом, а затем непрерывную аппроксимацию нелинейной функцией указанного вида и степенным многочленом. При этом составить блок-схему алгоритма, программу на языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах. Найти теоретические значения *Y* по проведённым аппроксимациям для заданного *X*.

**Вариант 1**

Вид функции аппроксимации: $Y = bX\ \exp\,(aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 0,747 | 1,262 | 2,009 | 2,524 | 3,039 | 3,786 | 4,764 | 5,511 | 6,489 | 7,467 |
| *Y* | 0,775 | 1,341 | 2,202 | 2,691 | 3,632 | 4,661 | 5,582 | 6,651 | 8,552 | 10,21 |

Найти *Y* при *X* = 4,11

**Вариант 2**

Вид функции аппроксимации: $Y = bX \exp(aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,542 | 1,084 | 1,497 | 1,909 | 2,451 | 3,123 | 3,665 | 4,338 | 5,010 | 5,682 |
| $Y$ | 2,041 | 1,952 | 1,841 | 1,982 | 1,971 | 1,812 | 1,801 | 1,882 | 1,871 | 1,952 |

Найти $Y$ при $X = 3{,}11$

**Вариант 3**

Вид функции аппроксимации: $Y = bX^2 \exp(aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,457 | 0,845 | 1,234 | 1,691 | 2,216 | 2,673 | 3,199 | 3,725 | 4,250 | 4,639 |
| $Y$ | 0,399 | 1,361 | 3,252 | 6,371 | 10,72 | 16,21 | 25,42 | 36,11 | 51,42 | 58,81 |

Найти $Y$ при $X = 2{,}55$

**Вариант 4**

Вид функции аппроксимации: $Y = b \exp(aX^2)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,609 | 1,114 | 1,723 | 2,436 | 3,045 | 3,757 | 4,470 | 5,182 | 5,687 | 6,193 |
| $Y$ | 0,377 | 0,433 | 0,546 | 0,777 | 1,221 | 2,382 | 5,221 | 13,42 | 26,81 | 62,72 |

Найти $Y$ при $X = 3{,}40$

**Вариант 5**

Вид функции аппроксимации: $Y = bX \exp(aX^2)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,621 | 1,242 | 1,981 | 2,601 | 3,340 | 4,079 | 4,818 | 5,321 | 5,824 | 6,445 |
| $Y$ | 0,117 | 0,258 | 0,425 | 0,639 | 1,051 | 1,672 | 2,811 | 3,662 | 5,671 | 8,332 |

Найти $Y$ при $X = 3{,}53$

**Вариант 6**

Вид функции аппроксимации: $Y = bX^a$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,028 | 0,059 | 0,086 | 0,117 | 0,149 | 0,180 | 0,211 | 0,242 | 0,270 | 0,301 |
| $Y$ | 0,138 | 0,139 | 0,142 | 0,151 | 0,153 | 0,161 | 0,152 | 0,163 | 0,153 | 0,154 |

Найти $Y$ при $X = 0{,}16$

**Вариант 7**

Вид функции аппроксимации: $Y = ba^x$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,028 | 0,055 | 0,085 | 0,115 | 0,145 | 0,175 | 0,205 | 0,233 | 0,263 | 0,293 |
| $Y$ | 3,241 | 3,132 | 3,301 | 3,332 | 3,501 | 3,242 | 3,561 | 3,292 | 3,321 | 3,662 |

Найти $Y$ при $X = 0{,}16$

**Вариант 8**

Вид функции аппроксимации: $Y = b + (a / X)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,659 | 1,364 | 2,070 | 2,775 | 3,388 | 4,001 | 4,660 | 5,366 | 5,979 | 6,638 |
| $Y$ | 3,371 | 1,062 | 0,321 | -0,45 | -0,22 | -0,38 | -0,45 | -0,53 | -0,64 | -0,69 |

Найти $Y$ при $X = 3,65$

**Вариант 9**

Вид функции аппроксимации: $Y = 1/(b + aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,742 | 1,589 | 2,435 | 3,074 | 3,712 | 4,455 | 5,301 | 5,940 | 6,682 | 7,529 |
| $Y$ | 0,561 | 1,401 | -2,92 | -0,83 | -0,52 | -0,33 | -0,24 | -0,27 | -0,18 | -0,14 |

Найти $Y$ при $X = 4,14$

**Вариант 10**

Вид функции аппроксимации: $Y = X/(b + aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,935 | 1,974 | 2,806 | 3,693 | 4,574 | 5,612 | 6,445 | 7,380 | 8,419 | 9,457 |
| $Y$ | 0,102 | 0,108 | 0,101 | 0,109 | 0,102 | 0,102 | 0,109 | 0,111 | 0,106 | 0,112 |

Найти $Y$ при $X = 5,20$

**Вариант 11**

Вид функции аппроксимации: $Y = b/(a + X)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,158 | 0,299 | 0,439 | 0,597 | 0,773 | 0,913 | 1,071 | 1,247 | 1,422 | 1,598 |
| $Y$ | 4,471 | 3,502 | 3,111 | 2,482 | 2,121 | 2,012 | 1,801 | 1,562 | 1,461 | 1,332 |

Найти $Y$ при $X = 0,88$

**Вариант 12**

Вид функции аппроксимации: $Y = bX/(a + X)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,178 | 0,343 | 0,520 | 0,710 | 0,875 | 1,053 | 1,243 | 1,433 | 1,623 | 1,788 |
| $Y$ | 0,091 | 0,221 | 0,261 | 0,303 | 0,357 | 0,382 | 0,389 | 0,421 | 0,435 | 0,414 |

Найти $Y$ при $X = 0,98$

**Вариант 13**

Вид функции аппроксимации: $Y = b + aX^2$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,711 | 1,422 | 2,225 | 2,843 | 3,554 | 4,358 | 5,161 | 5,964 | 6,583 | 7,201 |
| $Y$ | -0,01 | -0,48 | -1,41 | -2,53 | -4,04 | -5,98 | -8,71 | -11,7 | -13,5 | -16,6 |

Найти $Y$ при $X = 3,96$

**Вариант 14**

Вид функции аппроксимации: $Y = X^2/(b + aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | -0,51 | -1,17 | -1,54 | -2,06 | -2,71 | -3,37 | -4,02 | -4,40 | -4,78 | -5,29 |
| $Y$ | -0,09 | -0,33 | -0,55 | -0,84 | -1,19 | -1,64 | -2,06 | -2,16 | -2,47 | -2,81 |

Найти $Y$ при $X$ = -2,91

**Вариант 15**

Вид функции аппроксимации: $Y = 1/(b + aX^2)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,451 | 0,843 | 1,294 | 1,803 | 2,313 | 2,822 | 3,215 | 3,607 | 4,058 | 4,450 |
| $Y$ | 0,771 | 0,651 | 0,488 | 0,339 | 0,251 | 0,186 | 0,144 | 0,122 | 0,099 | 0,082 |

Найти $Y$ при $X$ = 2,45

**Вариант 16**

Вид функции аппроксимации: $Y = X/(b + aX^2)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,589 | 1,178 | 1,849 | 2,521 | 3,192 | 3,699 | 4,205 | 4,794 | 5,301 | 5,808 |
| $Y$ | -0,15 | -0,33 | -0,55 | -0,89 | -1,39 | -1,91 | -3,23 | -8,84 | 26,50 | 6,021 |

Найти $Y$ при $X$ = 3,20

**Вариант 17**

Вид функции аппроксимации: $Y = X^2/(b + aX^2)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,577 | 1,224 | 1,871 | 2,517 | 3,025 | 3,533 | 4,111 | 4,619 | 5,127 | 5,704 |
| $Y$ | 0,127 | 0,538 | 1,171 | 1,882 | 2,331 | 2,911 | 3,452 | 3,791 | 4,342 | 4,721 |

Найти $Y$ при $X$ = 3,14

**Вариант 18**

Вид функции аппроксимации: $Y = 1/(b + a\,exp(X))$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,453 | 0,973 | 1,494 | 1,879 | 2,264 | 2,716 | 3,101 | 3,486 | 3,939 | 4,459 |
| $Y$ | 0,137 | 0,112 | 0,084 | 0,063 | 0,048 | 0,033 | 0,023 | 0,017 | 0,011 | 0,006 |

Найти $Y$ при $X$ = 2,46

**Вариант 19**

Вид функции аппроксимации: $Y = X/(b + a\,exp\,(X))$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,193 | 0,426 | 0,579 | 0,731 | 0,924 | 1,077 | 1,229 | 1,422 | 1,656 | 1,848 |
| $Y$ | 0,081 | 0,235 | 0,385 | 0,759 | 4,100 | -2,23 | -0,99 | -0,59 | -0,37 | -0,29 |

Найти $Y$ при $X$ = 1,02

**Вариант 20**

Вид функции аппроксимации: $Y = b + a\ln(X)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,913 | 1,671 | 2,429 | 3,342 | 4,101 | 4,858 | 5,771 | 6,841 | 7,753 | 8,822 |
| $Y$ | 0,456 | 0,529 | 0,601 | 0,647 | 0,658 | 0,722 | 0,748 | 0,731 | 0,749 | 0,791 |

Найти $Y$ при $X$ = 4,87

**Вариант 21**

Вид функции аппроксимации: $Y = b + a / X^2$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | -0,14 | -0,27 | -0,42 | -0,55 | -0,68 | -0,83 | -0,98 | -1,12 | -1,27 | -1,42 |
| $Y$ | 237,1 | 63,71 | 28,42 | 16,21 | 11,72 | 8,351 | 5,872 | 4,731 | 4,062 | 3,471 |

Найти $Y$ при $X$ = -0,79

**Вариант 22**

Вид функции аппроксимации: $Y = \sqrt{b + aX}$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,987 | 1,974 | 3,099 | 4,225 | 5,212 | 6,337 | 7,324 | 8,451 | 9,575 | 10,71 |
| $Y$ | 2,551 | 3,492 | 4,211 | 5,152 | 5,701 | 5,952 | 6,391 | 7,042 | 7,481 | 8,112 |

Найти $Y$ при $X$ = 5,84

**Вариант 23**

Вид функции аппроксимации: $Y = X\sqrt{b + aX}$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,447 | 0,952 | 1,456 | 1,903 | 2,408 | 2,855 | 3,361 | 3,864 | 4,369 | 4,874 |
| $Y$ | 0,757 | 1,851 | 3,432 | 4,911 | 6,352 | 8,041 | 10,42 | 12,71 | 15,62 | 17,11 |

Найти $Y$ при $X$ = 2,66

**Вариант 24**

Вид функции аппроксимации: $Y = \sqrt{X/(b + aX)}$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,541 | 1,139 | 1,678 | 2,277 | 2,817 | 3,416 | 4,015 | 4,614 | 5,212 | 5,811 |
| $Y$ | 0,415 | 0,599 | 0,706 | 0,757 | 0,821 | 0,904 | 0,955 | 1,031 | 1,012 | 1,101 |

Найти $Y$ при $X$ = 3,18

**Вариант 25**

Вид функции аппроксимации: $Y = b\exp(aX)$

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0,807 | 1,615 | 2,575 | 3,383 | 4,344 | 5,304 | 6,265 | 6,919 | 7,573 | 8,381 |
| $Y$ | 0,121 | 0,131 | 0,123 | 0,127 | 0,139 | 0,145 | 0,158 | 0,147 | 0,166 | 0,156 |

Найти $Y$ при $X$= 4,59

# 4 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К решению **систем линейных алгебраических уравнений** (СЛУ) сводятся многие задачи анализа и синтеза физических систем различной природы: механических, гидравлических, электрических и т. п.

В общем виде система *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными записывается так:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1;$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = b_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n = b_n;$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – неизвестные системы;

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ – коэффициенты при неизвестных системах;

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ – свободные члены системы или в векторно-матричной форме $AX = b$,

где

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{vmatrix}; \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix};$$

есть соответственно матрица коэффициентов, вектор-столбец свободных членов и вектор-столбец неизвестных.

Решением СЛУ называется любая совокупность чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, которая, будучи подставленной на место неизвестной $X_1, X_2, ..., X_n$ в уравнении данной системы, обращает все эти уравнения в тождества.

Применяемые в практике численные методы решения СЛУ делятся на две группы: **точные** (прямые) и **приближенные** (итерационные). Точными называются методы, которые в предположении, что вычисления ведутся без округления, позволяют получить точное решение за конечное число математических операций. Приближенные методы даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, дают решение системы лишь с заданной точностью.

Прямые методы используются при решении на ЭВМ систем небольшого порядка $(n < 10^3)$. Итерационные методы целесообразно применять для систем высокого порядка $(n \approx 10^3 - 10^6)$.

На практике наиболее широко из прямых методов для решения СЛУ используется **метод Гаусса с выбором главного элемента**. Суть метода состоит в приведении матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнения системы. Сначала с помощью первого уравнения исключается $X_1$ из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается $X_2$ из третьего и всех последующих уравнений. Этот процесс называемый **прямым ходом метода Гаусса**, продолжается до тех пор, пока в левой части последнего (*n*-го) уравнения не останется лишь один член с неизвестным $X_n$, т. е. матрица системы будет приведена к треугольному виду. **Обратным ходом** метода Гаусса состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных: решая последнее уравнение, находим единственное неизвестное $X_n$. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем $X_{n-1}$ и т. д. Последним найдём $X_1$ из первого уравнения.

Рассмотрим применение метода Гаусса для системы:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1;$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2;$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3.$$

Для исключения $X_1$ из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $-a_{21}/a_{11}$. Затем, умножив первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$ и прибавив результат к третьему уравнению, также исключим из него $X_1$. Получим эквивалентную систему уравнений вида:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1;$$

$$a'_{22}X_2 + a'_{23}X_3 = b'_2;$$

$$a'_{32}X_2 + a'_{33}X_3 = b'_3,$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{ij}, \quad i, j = 2,3;$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_i, \; i = 2,3.$$

Теперь из третьего уравнения полученной системы нужно исключить $X_2$. Для этого умножим второе уравнение на $-a'_{32}/a'_{22}$ и прибавим результат к третьему. Получим:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1;$$

$$a'_{22}X_2 + a'_{23}X_3 = b'_2;$$

$$a''_{33}X_3 = b''_3,$$

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23}, \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2.$$

Т. о. матрица СЛУ имеет треугольный вид. На этом заканчивается **прямой ход** метода Гаусса.

Заметим, что в процессе исключения неизвестных приходится выполнять операции деления на коэффициенты $a_{11}$, $a'_{22}$ и т. д. Поэтому они должны быть отличными от нуля: в противном случае необходимо соответственным образом переставить уравнения системы, т. е. провести выбор главного элемента.

Суть этого выбора заключается в том, что из столбца коэффициентов уравнений системы, в которых не проведено очередное исключение неизвестных выбирают наибольший по модулю и перестанавливают эти уравнения так, чтобы этот коэффициент оказался на месте элемента главной диагонали матрицы системы. **Обратный ход** начинается с решения третьего уравнения системы:

$$X_3 = b''_3 / a''_{33}.$$

Используя это значение, можно найти $X_2$ из второго уравнения, а затем $X_1$ из первого:

$$X_2 = \frac{1}{a'_{22}}(b'_2 - a'_{23} X_3);$$

$$X_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}X_2 - a_{12}X_2).$$

Аналогично строится вычислительный алгоритм для СЛУ с произвольным числом уравнений.

**Метод прогонки** – является модификацией метода Гаусса для частного случая разреженных систем – системы уравнений с трех диагональной матрицей. Такие системы получаются при моделировании некоторых инженерных задач, а также при численном решении дифференциальных уравнений на краевую задачу.

Одним из самых распространённых итерационных методов решения СЛУ, отличающийся простотой и лёгкостью программирования, является **метод Гаусса-Зейделя**. Проиллюстрируем этот метод на примере решения той же СЛУ, что и метод Гаусса. Предположим, что диагональные элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ отличные от нуля (в противном случае можно переставить уравнения). Выразим неизвестные $X_1, X_2$ и $X_3$ соответственно из первого, второго и третьего уравнения системы:

$$X_1 = (b_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3) / a_{11};$$

$$X_2 = (b_2 - a_{21}X_1 - a_{23}X_3) / a_{22};$$

$$X_3 = (b_3 - a_{31}X_1 - a_{32}X_2) / a_{33}.$$

Зададим некоторые начальные (нулевые) приближения значений неизвестных: $X_1 = X_1^{(0)}, X_2 = X_2^{(0)}, X_3 = X_3^{(0)}$. Подставляя эти значения в правую часть предыдущих выражений, получаем новое (первое) приближение для $X_1$:

$$X_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}X_2^{(0)} - a_{13}X_3^{(0)}) / a_{11}.$$

Используя это значение для $X_1$ и приближение $X_3^{(0)}$ для $X_3$, находим новое приближение для $X_2$:

$$X_2^{(1)} = (b_2 - a_{21}X_1^{(1)} - a_{23}X_3^{(0)}) / a_{22}.$$

И, наконец, используя вычисленные значения $X_1 = X_1^{(1)}$, $X_2 = X_2^{(1)}$, находим первое приближение для $X_3$:

$$X_3^{(1)} = (b_3 - a_{31}X_1^{(1)} - a_{32}X_2^{(1)}) / a_{33}.$$

Далее итерационный процесс продолжается по рекуррентным формулам:

$$X_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}X_2^{(k-1)} - a_{13}X_3^{(k-1)}) / a_{11};$$

$$X_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}X_1^{(k-1)} - a_{23}X_3^{(k-1)}) / a_{22};$$

$$X_3^{(k)} = (b_3 - a_{31}X_1^{(k-1)} - a_{33}X_2^{(k-1)}) / a_{33}.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения $X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, X_3^{(k)}$ не станут близкими с заданной погрешностью к значениям $X_1^{(k-1)}, X_2^{(k-1)}, X_3^{(k-1)}$.

## Задание 2

Разработать ММ, блок-схему алгоритма и программу на алгоритмическом языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах для расчёта токов и напряжения в ветвях линейной электрической цепи постоянного тока, рассчитать мощность, выделяемую на резисторах. Исходные данные выбираются по заданному варианту (таблица 11).

Таблица 11 – Пример задания

| № ветви | Начало – конец | Сопротивления, Ом | Источники | |
|---|---|---|---|---|
| | | | эдс, В | тока, А |
| 1 | 2–4 | 650 | 0 | 0 |
| 2 | 4–3 | 510 | 100 | 0 |
| 3 | 3-1 | 130 | 0 | 0 |
| 4 | 1-5 | 340 | 300 | 2 |
| 5 | 5-6 | 420 | 0 | 0 |
| 6 | 6-2 | 240 | 0 | 4 |
| 7 | 3-2 | 430 | 0 | 0 |
| 8 | 4-5 | 310 | 0 | 0 |

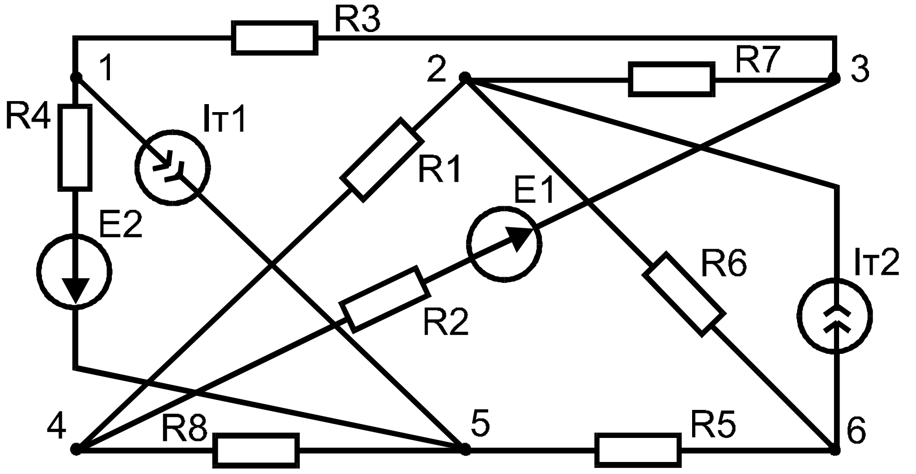
Определить напряжение $U_{64}$ .

## Методические указания к выполнению задания 2

Строим расчётную электрическую схему, которая, как очевидно, имеет 6 узлов, 8 ветвей (рисунок 8), при этом источники ЭДС и тока направляются от начала к концу ветвей и, кроме того, источники ЭДС включаются последовательно с сопротивлениями этих ветвей, а источники тока параллельно этим ветвям.

На листе бумаги отмечаем шесть узлов и между ними рисуем электрические элементы согласно таблице 11. в результате получим электрическую схему, приведенную на рисунке 8.

Очевидно, что предварительный вид электрической схемы недостаточно наглядный. Для более наглядного ее представления необходимо некоторые узлы поменять местами. В данном случае меняются местами узлы 1 и 6, а также 4 и 5. окончательный вид схемы представлен на рисунке 9. во всех ветвях схемы наметим произвольно направления токов.




R1=650 Ом
R2=510 Ом
R3=130 Ом
R4=340 Ом
R5=420 Ом
R6=240 Ом
R7=430 Ом
R8=310 Ом
E1=100 В
E2=300 В
Iт=2 А
Iт=4 А

Рисунок 8 – Расчетная электрическая схема

Изобразим расчетную схему в более наглядном для расчета виде (рисунок 9) и наметим произвольно направление токов во всех ветвях.

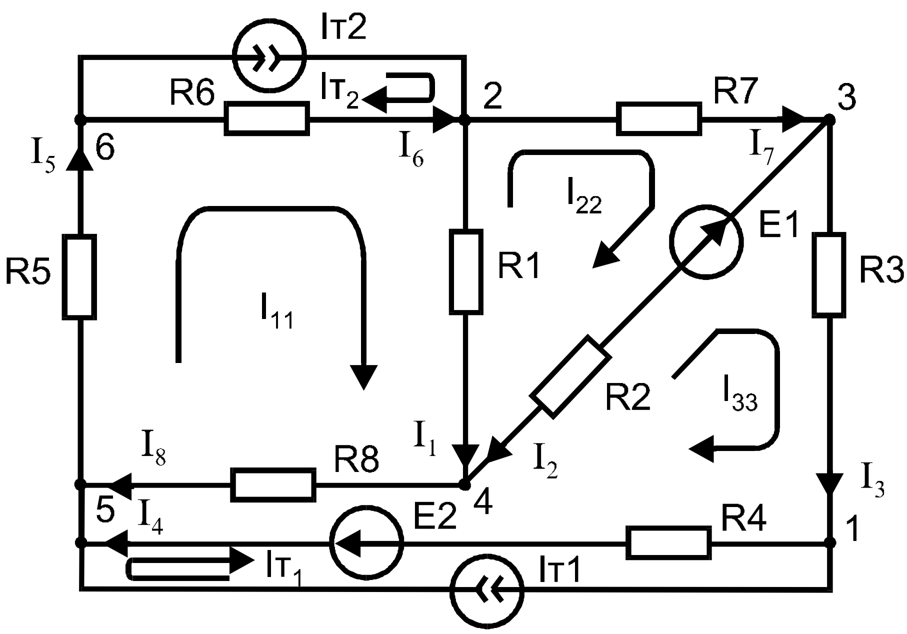



Рисунок 9 – Расчетная электрическая схема

Расчёт цепи проводим методом контурных токов. Составляем уравнения по 2-му закону Кирхгофа для контурных токов:

$$I_{11}R_5 + (I_{11} - I_{\text{Т}2})R_6 + (I_{11} - I_{22)})R_1 + (I_{11} - I_{33})R_8 = 0;$$

$$I_{22}R_7 + (I_{22} - I_{33})R_2 + (I_{22} - I_{11})R_1 = -E_1;$$

$$I_{33}R_7 + (I_{33} - I_{\text{Т}1})R_4 + (I_{33} - I_{11})R_8 + (I_{33} - I_{22})R_2 = E_1 + E_2.$$

Перегруппировав слагаемые в этих уравнениях, и сделав соответствующие преобразования, получим уравнения для определения контурных токов:

$$I_{11}(R_5 + R_6 + R_1 + R_8) - I_{22}R_1 - I_{33}R_8 = I_{\varPhi 2}R_6;$$

$$I_{22}(R_7 + R_2 + R_1) - I_{11}R_1 - I_{33}R_2 = -E_1;$$

$$I_{33}(R_3 + R_4 + R_8 + R_2) - I_{11}R_8 - I_{22}R_2 = E_1 + E_2 + I_{\varPhi 1}R_4.$$

Подставляя заданные числовые значения источников ЭДС, тока и сопротивления, получим:

$$I_{11}1620 - I_{22}650 - I_{33}310 = 960;$$

$$-I_{11}650 + I_{22}1590 - I_{33}510 = -100;$$

$$-I_{11}310 - I_{22}510 + I_{33}1290 = 1080.$$

Решив полученную систему линейных уравнений, найдём значения контурных токов $I_{11}$, $I_{22}$, $I_{33}$. Зная их, находим значения токов в ветвях по следующим зависимостям:

$$I_1 = I_{11} - I_{22};$$

$$I_2 = I_{22} - I_{33};$$

$$I_3 = I_{33};$$

$$I_4 = I_{33} - I_{\text{Т}1};$$

$$I_5 = I_{11};$$

$I_6 = I_{11} - I_{\text{Т}2};$

$I_7 = I_{22};$

$I_8 = I_{11} - I_{33.}$

Вычислив токи, находим значения искомого напряжения $U_{64}$:

$$U_{64} = -I_5 R_5 - I_8 R_8.$$

Далее определим суммарную мощность, выделяемую на резисторах:

$$\sum I^2 R = I_1^{\,2} R_1 + I_2^{\,2} R_2 + I_3^{\,2} R_3 + I_4^{\,2} R_4 + I_5^{\,2} R_5 + I_6^{\,2} R_6 + I_7^{\,2} R_7 + I_8^{\,2} R_8.$$

Для решения системы линейных уравнений будем использовать метод Гаусса с выбором главного элемента. Он основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Этот процесс называется прямым ходом метода Гаусса. Далее проводится обратный ход этого метода, который состоит в последовательном вычислении искомых неизвестных, начиная с последнего и заканчивая первым. Блок-схема алгоритма решения рассматриваемой задачи представлена на рисунке 10.

В первом блоке производится ввод исходных данных: количества неизвестных в полученной системе линейных уравнений, а также её коэффициентов при неизвестных и свободные члены. Начиная со второго блока, и включая 25 блок, идёт программа решения системы линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. При этом во 2–19 блоках проводится прямой ход этого метода, а 20–25 – обратный. В блоках 3–14 проводится выбор главного элемента. Начиная с 26 блока, идёт расчёт токов в ветвях цепи, требуемого напряжения, мощностей. Блок-схема заканчивается выводом искомых параметров (блок 40). На основании разработанного алгоритма была составлена программа на **Pascal** и **Basic** для решения данной задачи на ЭВМ (программа 7 и 8). Последовательность её операторов соответствует разработанной блок-схеме алгоритма.

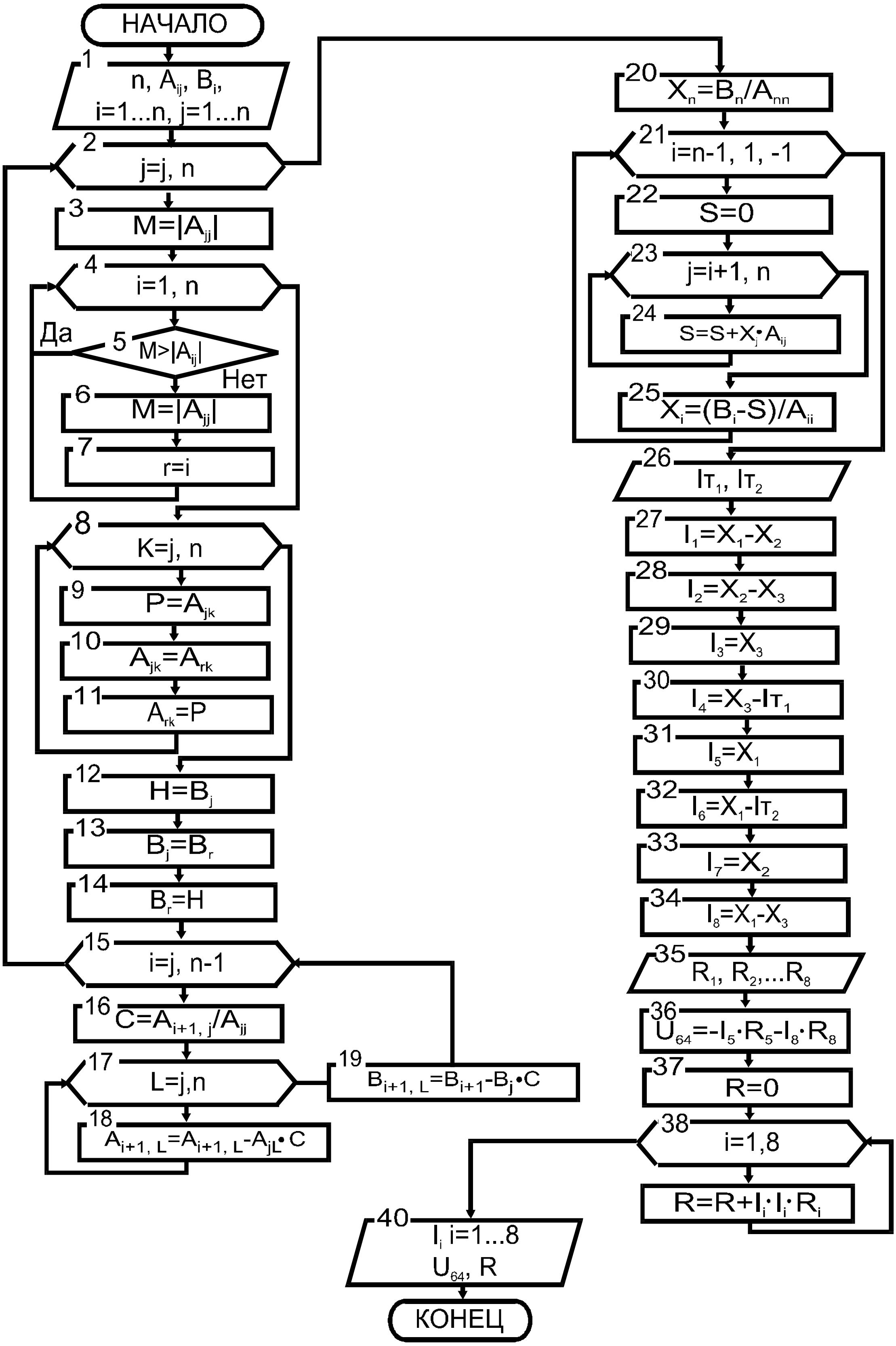



Рисунок 10 – Блок-схема алгоритма расчета линейной электрической цепи постоянного тока

Пример решения задания 2 на языке **Pascal**.

Программа 7

```
Const N=3;
var A : array [1..N,1..N] of real;
 B,X : array [1..N] of real;
 T,R : array [1..8] of real;
 i,j : Integer;
 U,T01,T02,R0 : Real;
Procedure RSLU;
var N1,N2,K,L : Integer;
 M,P,H,C,S : Real;
Begin
 For j:=1 to n do
 Begin
  N1:=N-1;
  M:=Abs(A[j,j]);
  For i:=j to n do If M<=Abs(A[i,j]) Then
  Begin M:=Abs(A[i,j]); N2:=i; end;
  For K:=j to n do
  Begin
   P:=A[j,k];
   A[j,k]:=A[n2,k];
   A[n2,k]:=P;
  end;
  H:=B[j];
  B[j]:=B[N2];
  B[N2]:=H;
  For i:=j to N1 do
  Begin
   C:=A[i+1,j]/A[j,j];
   For L:=j to n do
   A[i+1,L]:=A[i+1,L]-A[j,L]*C;
   B[i+1]:=B[i+1]-B[j]*C;
  end;
 end;
 X[n]:=B[n]/A[n,n];
 For i:=N1 downto 1 do
 Begin
  S:=0;
  For j:=i+1 to n do
  S:=S+X[j]*A[i,j];
  X[i]:=(B[i]-S)/A[i,i];
 end;
end;
Begin
```

```
 For i:=1 to n do
 Begin
  For j:=1 to n do
  Begin
   Write('Введите A[',i,',',j,']=');
   Readln(A[i,j]);
  end;
  Write('Введите B[',i,']='); Readln(B[i]);
 end;
 RSLU;
 Writeln ('Введите значения источников тока');
 Readln (T01,T02);
 T[1]:=X[1]-X[2];
 T[2]:=X[2]-X[3];
 T[3]:=X[3];
 T[4]:=X[3]-T01;
 T[5]:=X[1];
 T[6]:=X[1]-T02;
 T[7]:=X[2];
 T[8]:=X[1]-X[3];
 Writeln ('Введите зн-е сопротивлений R1..R8');
 Readln (R[1],R[2],R[3],R[4],R[5],R[6],R[7],R[8]);
 U:=-T[5]*R[5]-T[8]*R[8];
 R0:=0;
 For i:=1 to 8 do
 R0:=R0+T[i]*T[i]*R[i];
 Writeln ('Результаты расчета');
 For i:=1 to 8 do
 Writeln ('T[',i,']=',T[i]:6:3);
 Writeln ('U64=',U:6:2);
 Writeln ('Мощность на резисторах ',R0:6:2);
end.
```

Пример решения задания 2 на языке **Basic**.

Программа 8

```
10 PRINT "ЗАДАЙТЕ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ N"
20 INPUT N
30 DIM A(N,N),B(N),X(N),T(8),R(8)
40 FOR I=1 TO N
50 FOR J=1 TO N
60 PRINT "ВВЕДИТЕ A("I","J")"
70 INPUT A(I,J)
80 NEXT J
90 PRINT "ВВЕДИТЕ B("I")"
100 INPUT B(I)
```

```
110 NEXT I
120 GOSUB 370
130 PRINT "ВВЕДИТЕ ЗНАЧЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ТОКА"
140 INPUT T1,T2
150 T(1)=X(1)-X(2)
160 T(2)=X(2)-X(3)
170 T(3)=X(3)
180 T(4)=X(3)-T1
190 T(5)=X(1)
200 T(6)=X(1)-T2
210 T(7)=X(2)
220 T(8)=X(1)-X(3)
230 PRINT "ВВЕДИТЕ ЗНАЧЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЙ R1,...,R8"
240 INPUT R(1),R(2),R(3),R(4),R(5),R(6),R(7),R(8)
250 U=-T(5)*R(5)-T(8)*R(8)
260 R=0
270 FOR I=1 TO 8
280 R=R+T(I)*T(I)*R(I)
290 NEXT I
300 PRINT "РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА"
310 FOR I=1 TO 8
320 PRINT "T("I")="T(I)
330 NEXT I
340 PRINT "U64="U
350 PRINT "МОЩНОСТЬ НА РЕЗИСТОРАХ="R
360 STOP
370 FOR J=1 TO N
380 N1=N-1
390 M=ABS(A(J,J))
400 FOR I=J TO N
410 IF M>ABS(A(I,J)) THEN 440
420 M=ABS(A(I,J))
430 N2=I
440 NEXT I
450 FOR K=J TO N
460 P=A(J,K)
470 A(J,K)=A(N2,K)
480 A(N2,K)=P
490 NEXT K
500 H=B(J)
510 B(J)=B(N2)
520 B(N2)=H
530 FOR I=J TO N1
540 C=A(I+1,J)/A(J,J)
550 FOR L=J TO N
```

```
560 A(I+1,J)=A(I+1,J)-A(J,L)*C
570 NEXT L
580 B(I+1)=B(I+1)-B(J)*C
590 NEXT I
600 NEXT J
610 X(N)=B(N)/A(N,N)
620 FOR I=N1 TO 1 STEP (-1)
630 S=0
640 FOR J=I+1 TO N
650 S=S+X(J)*A(I,J)
660 NEXT J
670 X(I)=(B(I)-S)/A(I,I)
680 NEXT I
690 RETURN
700 END
```

Пример решения задания 2 в пакете **Matlab**.

Программа 9

```
A=[1620 -650 -310;-650 1590 -510;-310 -510 1290];
B=[960;-100;1080];
R=[650 510 130 340 420 240 430 310];
I=A\B;
i(1)=I(1)-I(2);
i(2)=I(2)-I(3);
i(3)=I(3);
i(4)=I(3)-2;
i(5)=I(1);
i(6)=I(1)-4;
i(7)=I(2);
i(8)=I(1)-I(3);
U64=-i(5)*R(5)-i(8)*R(8);
P=i.^2.*R;
p=sum(P);
disp(' I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8'); disp(i);
disp(' U64  P,kBt');
disp([U64 p/1000]);
```

Результаты расчета:

| *I*1 | *I*2 | *I*3 | *I*4 | *I*5 | *I*6 | *I*7 | *I*8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,3217 | –0,5740 | 1,5086 | –0,4914 | 1,2562 | –2,7438 | 0,9345 | –0,2523 |

| *U*64 | *P*, кВт |
|---|---|
| –449,3998 | 3,4782 |

**Пример выполнения задания в пакете Matlab**

В командном окне MATLAB выберем кнопку **Simulink**. Появится окно **Simulink Library Browser**. В нем слева каталог пакетов, а справа разделы библиотеки блоков пакета. По умолчанию обычно в левой части окна раскрыт пункт **Simulink** (перечислены его разделы), а справа иконки разделов: **Continuous** (непрерывные компоненты), **Discrete** (дискретные компоненты), **Functions & Tables** (компоненты для формирования собственных функций пользователя). **Math** (математические), **Nonlinear** (нелинейные), **Signals & Systems** (компоненты для управления прохождением сигналов в системе), **Sinks** (регистраторы сигналов), **Sources** (источники сигналов). Если пункт **Simulink** не раскрыт, щелкнем ЛКМ (левой кнопкой мыши) на знаке «+» возле пункта **Simulink.** Чтобы увидеть набор имеющихся блоков в разделе, нужно щелкнуть ЛКМ на данном разделе слева или на «+» возле иконки раздела.

В главном меню окна **Simulink Library Browser** выберем **File** – **New** – **Model** – появится окно **untitled.** В этом окне будем создавать модель, «перетаскивая» соответствующие блоки из библиотеки SIMULINK в окно **untitled.**

Для модели нам понадобятся блоки **Display,** соответствующие блоки находятся в разделе **Sinks**, блоки **Constant**, которые находятся в разделе **Sources**. Из пакета **Power System Blockset** понадобятся блоки **Bus Bar,** которые находятся в разделе **Connectors**, блоки **Controlled Current Source** и **DC Voltage Source** находятся в разделе **Electrical Sources**, блоки **Parallel RLC Branch** находятся в разделе **Elements**, блоки **Current Measurement** и **Voltage Measurement** в разделе **Measurements**. Блоки необходимые для построения модели представлены на рисунке 11.

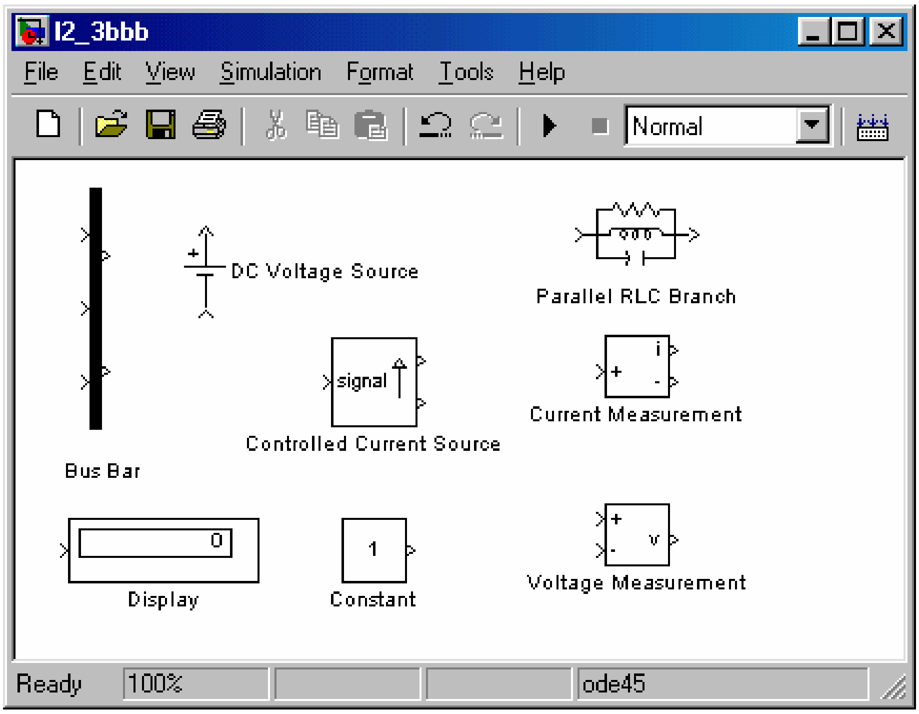



Рисунок 11 – Блоки необходимые для построения модели схемы

На рисунке 12 показана настройка параметров блока **Parallel RLC Branch** для сопротивления R1.

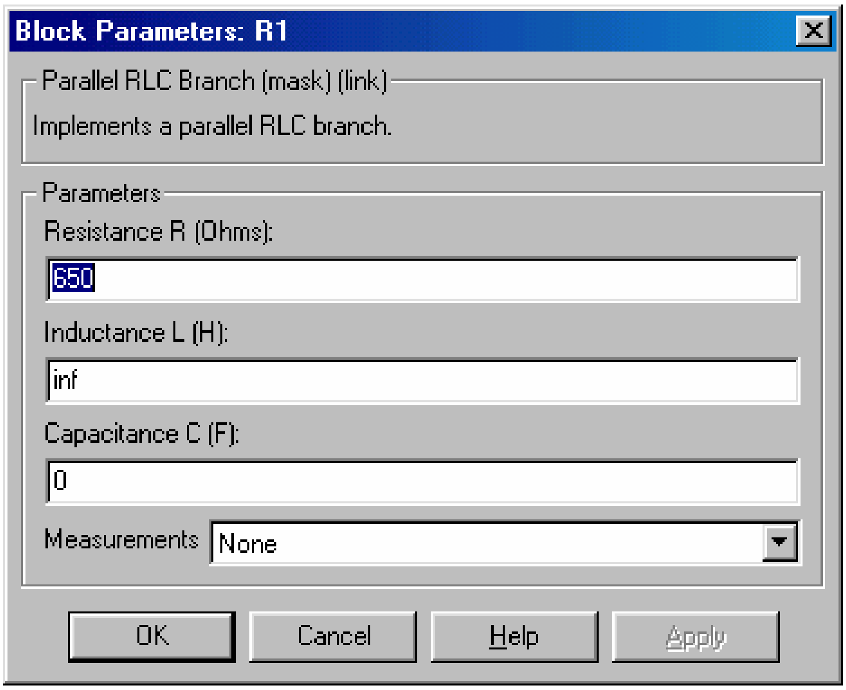



Рисунок 12 – Настройка параметров блока *Parallel RLC Branch*

Для других блоков настройка параметров проводится таким же образом. Из выбранных блоков можно собрать схему (рисунок 13). Поскольку требуется отыскать значения токов во всех ветвях схемы, то в соответствующие ветви помещены измерители, а для измерения напряжения измеритель подключен к соответствующим узлам. Для повышения наглядности схемы измерители и дисплеи для отображения информации можно объединить в одни блоки. Для этого при нажатой клавише **Shift** выделяются необходимые блоки, и выбирается подраздел **«Create Subsystem»** раздела **«Edit»**. Итоговая схема представлена на рисунке 14. Для просмотра результатов моделирования по объединенному блоку необходимо сделать двойной щелчок ЛКМ.

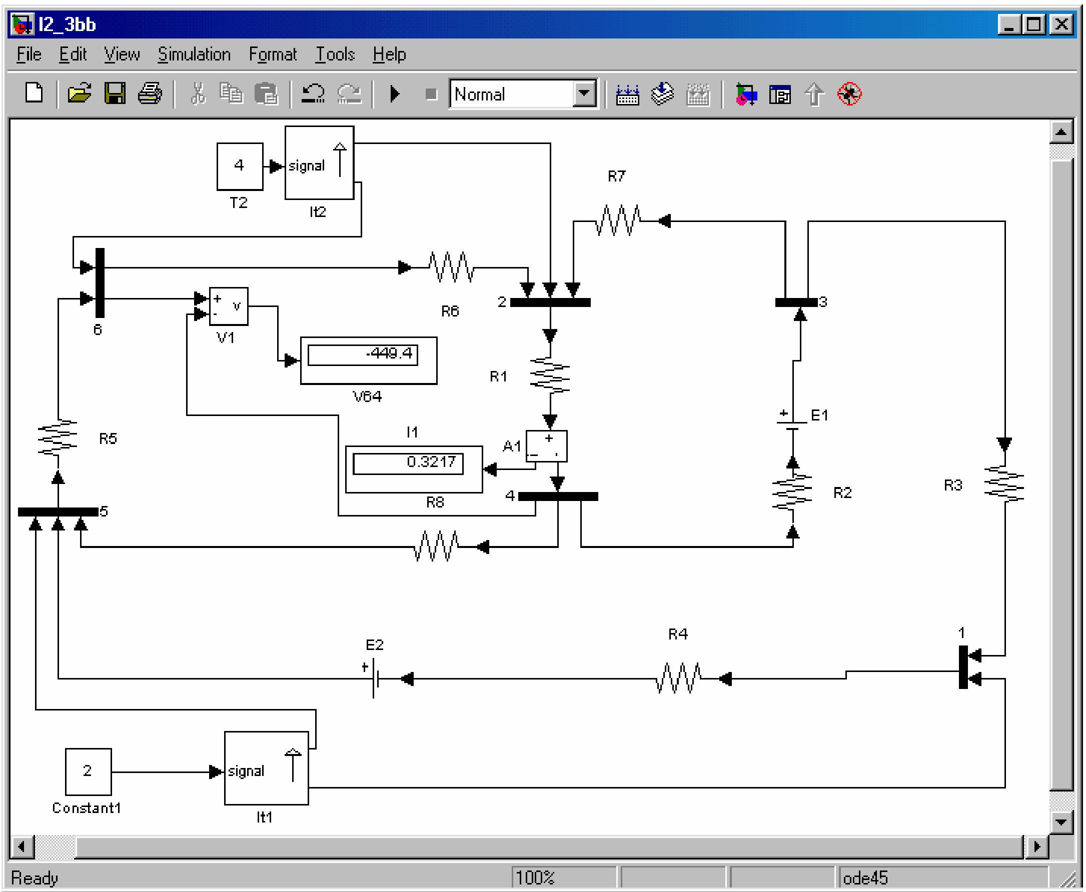



Рисунок 13 – Модель электрической схемы по заданию 2

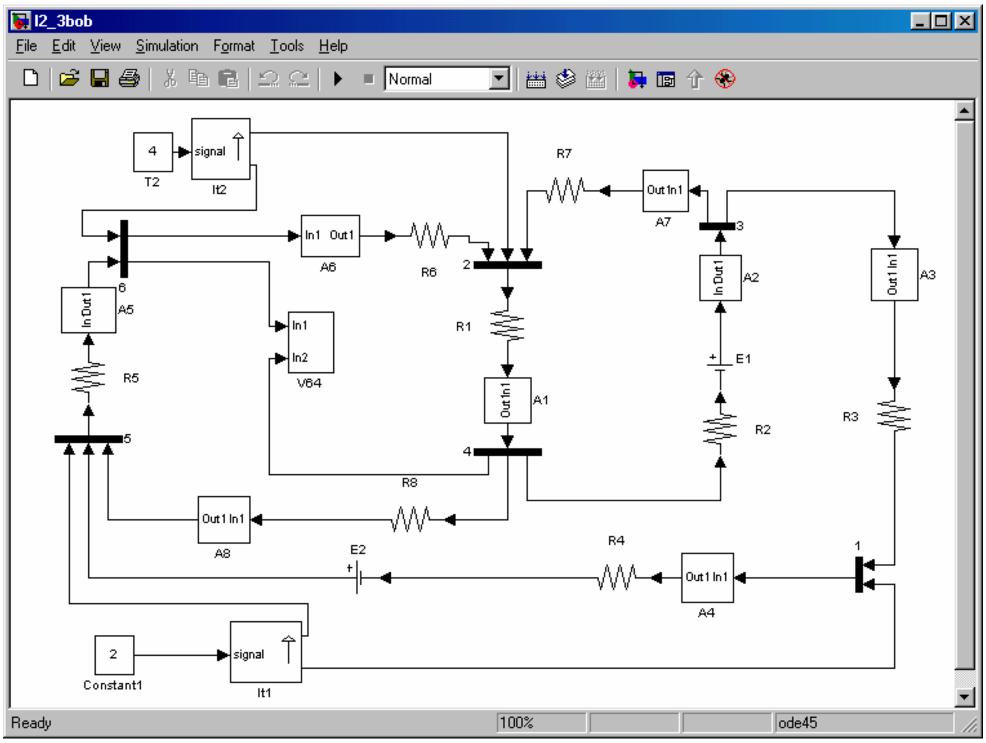



Рисунок 14 – Модель электрической схемы по заданию 2
с измерением токов во всех ветвях схемы

Пример выполнения задания 2 в пакете **Excel**

Таблица 12 – Исходные данные

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | R1= | 650 | | | | | | I<br>1= | |
| 2 | R2= | 510 | | | | | | I2= | |
| 3 | R3= | 130 | | | | | | I3= | |
| 4 | R4= | 340 | | | | | | I4= | |
| 5 | R5= | 420 | | | | | | I5= | |
| 6 | R6= | 240 | | | | | | I6= | |
| 7 | R7= | 430 | | | | | | I7= | |
| 8 | R8= | 310 | | | | | | I8= | |
| 9 | E1= | 100 | | | | | | U64= | |
| 10 | E2= | 300 | | | | | | Psum= | |
| 11 | It1= | 2 | | | | | | | |
| 12 | It2= | 4 | | | | | | | |

C1) `=B5+B6+B1+B8`
D1) `=-B1`
E1) `=-B8`
C2) `=-B1`
D2) `=B7+B2+B1`
E2) `=-B2`
C3) `=-B8`
D3) `=-B2`
E3) `=B3+B4+B8+B2`
F1) `=B12*B6`
F2) `=-B9`
F3) `=B9+B10+B11*B4`

Выделим блок ячеек C4–E6 под обратную матрицу, введем **МОБР(C1:E3)** и нажмем **Shift+Ctrl+Enter**. Затем выделим блок ячеек G1..G3 под значения контурных токов, введем **МУМНОЖ (C4 : E6 ; F1 : F3)** и нажмем **Shift+Ctrl+Enter**.

I1) `=G1-G2`
I2) `=G2-G3`
I3) `=G3`
I4) `=G3-B11`
I5) `=G1`
I6) `=G1-B12`
I7) `=G2`
I8) `=G1-G3`
I9) `=-I5*B5-I8*B8`
I10) `=I1^2*B1+I2^2*B2+I3^2*B3+I4^2*B4+I5^2*B5+I6^2*B6+I7^2*B7+I8^2*B8`

## Вопросы для самопроверки

1 Понятие и примеры СЛУ.

2 Что такое матрица коэффициентов, вектора неизвестных и свободных членов СЛУ? Какие элементы матрицы коэффициентов называются диагональными?

3 На примере СЛУ с 2-мя неизвестными приведите возможные случаи существования решения СЛУ с их графической интерпретацией.

4 Дайте классификацию методам решения СЛУ.

5 Какие методы решения СЛУ называются прямыми? В каком случае они позволяют получить точное решение СЛУ? От чего зависит количество арифметических вычислений при использовании этих методов?

6 Какие методы решения называются итерационными? Что такое итерация и от чего зависит число итераций? Можно ли с помощью этого метода получить точное решение СЛУ?

7 Из каких этапов состоит решение СЛУ методом Гаусса с выбором главного элемента и в чём сущность каждого этапа? Продемонстрируйте этот метод на конкретном примере.

8 Какая СЛУ называется треугольной, в чём её особенность и как она решается?

9. Приведите и поясните схему алгоритма и участок программы на языке ПАСКАЛЬ для ввода матрицы коэффициентов и вектора свободных членов СЛУ.

10 Поясните суть процедуры выбора главного элемента при решении методом Гаусса с выбором главного элемента? Для чего нужна эта процедура?

11 Из каких этапов состоит решение СЛУ итерационным методом Гаусса-Зейделя?

12 В каком случае итерационный процесс называется сходящимся, а в каком – расходящимся?

## Индивидуальные задания

По заданному варианту составить электрическую схему, разработать ММ, блок-схему алгоритма и программу на алгоритмическом языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах для расчёта токов и напряжения в ветвях линейной электрической цепи постоянного тока. Рассчитать мощность, выделяемую на резисторах.

Вариант 1

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 6-5 | 410 | 300 | 0 |
| 2 | 5-2 | 130 | 0 | 0 |
| 3 | 2-3 | 320 | 200 | 6 |
| 4 | 3-1 | 250 | 0 | 0 |
| 5 | 1-4 | 560 | 0 | 5 |
| 6 | 4-6 | 650 | 0 | 0 |
| 7 | 2-6 | 520 | 0 | 0 |
| 8 | 5-1 | 230 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U45$.

Вариант 2

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 5-2 | 640 | 300 | 5 |
| 2 | 2-3 | 410 | 0 | 0 |
| 3 | 3-1 | 130 | 0 | 2 |
| 4 | 1-4 | 320 | 0 | 0 |
| 5 | 4-6 | 250 | 0 | 0 |
| 6 | 6-5 | 520 | 0 | 0 |
| 7 | 3-5 | 230 | 100 | 0 |
| 8 | 2-4 | 310 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U62$.

Вариант 3

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 4-6 | 130 | 0 | 6 |
| 2 | 6-5 | 320 | 0 | 0 |
| 3 | 5-2 | 250 | 0 | 0 |
| 4 | 2-3 | 560 | 0 | 0 |
| 5 | 3-1 | 640 | 200 | 0 |
| 6 | 1-4 | 460 | 0 | 0 |
| 7 | 5-4 | 650 | 500 | 4 |
| 8 | 6-3 | 520 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U16$.

Вариант 4

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 3-4 | 120 | 0 | 0 |
| 2 | 4-6 | 250 | 0 | 0 |
| 3 | 6-5 | 560 | 0 | 0 |
| 4 | 5-2 | 640 | 500 | 0 |
| 5 | 2-1 | 430 | 0 | 0 |
| 6 | 1-3 | 340 | 600 | 3 |
| 7 | 6-3 | 460 | 0 | 0 |
| 8 | 4-2 | 650 | 0 | 4 |

Определить напряжение $U14$.

Вариант 5

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 2-3 | 150 | 0 | 0 |
| 2 | 3-4 | 560 | 0 | 0 |
| 3 | 4-6 | 640 | 600 | 0 |
| 4 | 6-5 | 430 | 0 | 0 |
| 5 | 5-1 | 320 | 400 | 2 |
| 6 | 1-2 | 230 | 0 | 0 |
| 7 | 4-2 | 340 | 0 | 3 |
| 8 | 3-5 | 460 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U13$.

Вариант 6

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 3-4 | 210 | 600 | 3 |
| 2 | 4-6 | 150 | 0 | 0 |
| 3 | 6-5 | 560 | 0 | 4 |
| 4 | 5-1 | 640 | 0 | 0 |
| 5 | 1-2 | 430 | 0 | 0 |
| 6 | 2-3 | 340 | 0 | 0 |
| 7 | 6-3 | 460 | 500 | 0 |
| 8 | 4-1 | 650 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U24$.

Вариант 7

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 4-6 | 320 | 0 | 6 |
| 2 | 6-5 | 210 | 0 | 0 |
| 3 | 5-1 | 150 | 0 | 0 |
| 4 | 1-2 | 560 | 0 | 0 |
| 5 | 2-3 | 640 | 100 | 0 |
| 6 | 3-4 | 460 | 0 | 0 |
| 7 | 5-4 | 650 | 500 | 4 |
| 8 | 6-2 | 510 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U36$.

Вариант 8

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 5-1 | 640 | 200 | 5 |
| 2 | 1-2 | 430 | 0 | 0 |
| 3 | 2-3 | 320 | 0 | 1 |
| 4 | 3-4 | 210 | 0 | 0 |
| 5 | 4-6 | 150 | 0 | 0 |
| 6 | 6-5 | 510 | 0 | 0 |
| 7 | 2-5 | 120 | 300 | 0 |
| 8 | 1-4 | 230 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U61$.

Вариант 9

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 1-2 | 560 | 0 | 0 |
| 2 | 2-3 | 640 | 0 | 2 |
| 3 | 3-4 | 430 | 0 | 0 |
| 4 | 4-6 | 320 | 0 | 0 |
| 5 | 6-5 | 210 | 0 | 0 |
| 6 | 5-1 | 120 | 400 | 0 |
| 7 | 3-1 | 230 | 0 | 0 |
| 8 | 2-6 | 340 | 300 | 1 |

Определить напряжение $U52$.

Вариант 10

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 4-3 | 610 | 500 | 0 |
| 2 | 3-2 | 150 | 0 | 0 |
| 3 | 2-5 | 520 | 200 | 4 |
| 4 | 5-1 | 230 | 0 | 0 |
| 5 | 1-6 | 340 | 0 | 3 |
| 6 | 6-4 | 430 | 0 | 0 |
| 7 | 2-4 | 320 | 0 | 0 |
| 8 | 3-1 | 250 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U63$.

## Вариант 11

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 3-2 | 460 | 0 | 2 |
| 2 | 2-5 | 610 | 0 | 0 |
| 3 | 5-1 | 150 | 0 | 0 |
| 4 | 1-6 | 520 | 0 | 0 |
| 5 | 6-4 | 230 | 100 | 0 |
| 6 | 4-3 | 320 | 0 | 0 |
| 7 | 5-3 | 250 | 500 | 3 |
| 8 | 2-6 | 510 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U42$.

## Вариант 12

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 2-5 | 340 | 100 | 2 |
| 2 | 5-1 | 460 | 0 | 0 |
| 3 | 1-6 | 610 | 0 | 5 |
| 4 | 6-4 | 150 | 0 | 0 |
| 5 | 4-3 | 520 | 0 | 0 |
| 6 | 3-2 | 250 | 0 | 0 |
| 7 | 1-2 | 510 | 600 | 0 |
| 8 | 5-4 | 160 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U35$.

## Вариант 13

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 5-1 | 230 | 0 | 0 |
| 2 | 1-6 | 340 | 0 | 0 |
| 3 | 6-4 | 460 | 400 | 0 |
| 4 | 4-3 | 610 | 0 | 0 |
| 5 | 3-2 | 150 | 600 | 5 |
| 6 | 2-5 | 510 | 0 | 0 |
| 7 | 6-5 | 160 | 0 | 1 |
| 8 | 1-3 | 640 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U21$.

## Вариант 14

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 1-6 | 520 | 0 | 0 |
| 2 | 6-4 | 230 | 0 | 6 |
| 3 | 4-3 | 340 | 0 | 0 |
| 4 | 3-2 | 460 | 0 | 0 |
| 5 | 2-5 | 610 | 0 | 0 |
| 6 | 5-1 | 160 | 300 | 0 |
| 7 | 4-1 | 640 | 0 | 0 |
| 8 | 6-2 | 430 | 400 | 1 |

Определить напряжение $U56$.

## Вариант 15

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 2-6 | 150 | 0 | 0 |
| 2 | 6-4 | 530 | 0 | 0 |
| 3 | 4-3 | 340 | 300 | 0 |
| 4 | 3-5 | 460 | 0 | 0 |
| 5 | 5-1 | 620 | 400 | 2 |
| 6 | 1-2 | 260 | 0 | 0 |
| 7 | 4-2 | 640 | 0 | 6 |
| 8 | 6-5 | 430 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U16$.

## Вариант 16

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 1-5 | 460 | 0 | 5 |
| 2 | 5-3 | 620 | 0 | 0 |
| 3 | 3-2 | 230 | 0 | 0 |
| 4 | 2-6 | 350 | 0 | 0 |
| 5 | 6-4 | 510 | 200 | 0 |
| 6 | 4-1 | 150 | 0 | 0 |
| 7 | 3-1 | 530 | 300 | 1 |
| 8 | 5-6 | 320 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U45$.

## Вариант 17

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 4-5 | 160 | 0 | 5 |
| 2 | 5-3 | 620 | 0 | 0 |
| 3 | 3-2 | 230 | 0 | 0 |
| 4 | 2-6 | 350 | 0 | 0 |
| 5 | 6-1 | 540 | 200 | 0 |
| 6 | 1-4 | 450 | 0 | 0 |
| 7 | 3-4 | 530 | 300 | 4 |
| 8 | 5-6 | 320 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U15$.

## Вариант 18

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 5-3 | 410 | 0 | 3 |
| 2 | 3-2 | 160 | 0 | 0 |
| 3 | 2-6 | 620 | 0 | 0 |
| 4 | 6-1 | 230 | 0 | 0 |
| 5 | 1-4 | 350 | 600 | 0 |
| 6 | 4-5 | 530 | 0 | 0 |
| 7 | 2-5 | 320 | 200 | 5 |
| 8 | 3-1 | 260 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U43$.

## Вариант 19

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 1-4 | 620 | 500 | 1 |
| 2 | 4-5 | 230 | 0 | 0 |
| 3 | 5-3 | 350 | 0 | 4 |
| 4 | 3-2 | 540 | 0 | 0 |
| 5 | 2-6 | 410 | 0 | 0 |
| 6 | 6-1 | 140 | 0 | 0 |
| 7 | 5-1 | 450 | 300 | 0 |
| 8 | 4-2 | 530 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U64$.

## Вариант 20

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 2-6 | 350 | 100 | 2 |
| 2 | 6-1 | 540 | 0 | 0 |
| 3 | 1-4 | 410 | 0 | 6 |
| 4 | 4-5 | 160 | 0 | 0 |
| 5 | 5-3 | 620 | 0 | 0 |
| 6 | 3-2 | 260 | 0 | 0 |
| 7 | 1-2 | 610 | 400 | 0 |
| 8 | 6-5 | 140 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U36$.

## Вариант 21

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 3-2 | 540 | 0 | 0 |
| 2 | 2-6 | 410 | 600 | 3 |
| 3 | 6-1 | 160 | 0 | 0 |
| 4 | 1-4 | 620 | 0 | 2 |
| 5 | 4-5 | 230 | 0 | 0 |
| 6 | 5-3 | 320 | 0 | 0 |
| 7 | 6-3 | 260 | 0 | 0 |
| 8 | 2-4 | 610 | 100 | 0 |

Определить напряжение $U52$.

## Вариант 22

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 6-3 | 540 | 200 | 6 |
| 2 | 3-2 | 410 | 0 | 0 |
| 3 | 2-1 | 120 | 0 | 3 |
| 4 | 1-4 | 230 | 0 | 0 |
| 5 | 4-5 | 360 | 0 | 0 |
| 6 | 5-6 | 630 | 0 | 0 |
| 7 | 2-6 | 320 | 100 | 0 |
| 8 | 3-4 | 210 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U53$.

## Вариант 23

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 3-2 | 650 | 0 | 0 |
| 2 | 2-1 | 540 | 0 | 0 |
| 3 | 1-4 | 410 | 400 | 0 |
| 4 | 4-5 | 120 | 0 | 0 |
| 5 | 5-6 | 230 | 100 | 3 |
| 6 | 6-3 | 320 | 0 | 0 |
| 7 | 1-3 | 210 | 0 | 2 |
| 8 | 2-5 | 140 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U62$.

## Вариант 24

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО-КОНЕЦ | СОПРОТИВ-ЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 5-4 | 160 | 0 | 0 |
| 2 | 4-3 | 620 | 0 | 4 |
| 3 | 3-2 | 230 | 0 | 0 |
| 4 | 2-6 | 340 | 0 | 0 |
| 5 | 6-1 | 450 | 0 | 0 |
| 6 | 1-5 | 540 | 200 | 0 |
| 7 | 3-5 | 430 | 0 | 0 |
| 8 | 4-6 | 320 | 300 | 5 |

Определить напряжение $U14$.

## Вариант 25

| НОМЕР ВЕТВИ | НАЧАЛО–КОНЕЦ | СОПРОТИВЛЕНИЯ, ОМ | ИСТОЧНИКИ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | ЭДС, В | ТОКА, А |
| 1 | 5-4 | 210 | 0 | 0 |
| 2 | 4-3 | 160 | 0 | 0 |
| 3 | 3-6 | 630 | 600 | 0 |
| 4 | 6-1 | 340 | 0 | 0 |
| 5 | 1-2 | 450 | 300 | 5 |
| 6 | 2-5 | 540 | 0 | 0 |
| 7 | 3-5 | 430 | 0 | 4 |
| 8 | 4-1 | 360 | 0 | 0 |

Определить напряжение $U24$.

# 5 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

**Нелинейные** уравнения разделяются на **алгебраические** и **трансцендентные**.

**Алгебраическими** уравнениями называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные).

Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.) называются **трансцендентными**.

Методы решения нелинейных уравнений (НУ) и их систем (СНУ) тоже делятся на **прямые** и **итерационные**.

**Прямые** методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Однако большинство встречающихся на практике уравнений и их систем не удаётся решить такими методами. Поэтому для их решения в основном используются **итерационные** методы, т. е. методы последовательных приближений. Алгоритм нахождения решения в данном случае состоит из двух этапов:

- отыскание приближённого значения корней или содержащих их отрезков;
- уточнение приближённых значений до некоторой заданной степени точности.

Наиболее часто для решения НУ и СНУ используется метод **простой итерации**, который заключается в реализации итерационного процесса по следующей формуле:

$$X_i^{(n+1)} = f(X_i^{(n)}).$$

Применяемая после преобразования системы нелинейных уравнений общего вида:

$$F_i(X_i) = 0,$$

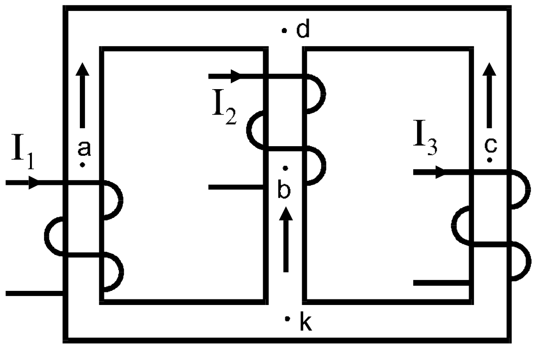
к виду $X_i = f_i(X_i)$. Здесь $i$ – номер переменной ($i, 2, \ldots, k$), $n$ – номер итерации. Вычисления ведутся до тех пор, пока соблюдается условие $|(X_i^{n+1} - X_i^{n}) / X_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}| < \varepsilon$ где ε – заданная точность решения в относительных единицах.

## Задание 3

Разработать ММ, блок-схему алгоритма и программу на алгоритмическом языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах для расчёта магнитных потоков в стержнях заданной магнитной цепи. Магнитные свойства стали, из которой выполнены стержни, выражаются кривой намагничивания, заданной в виде таблицы.

Таблица 13 – Пример задания

| H, А/м | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 120 | 200 | 400 | 600 | 800 | 1200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B, Тл | 0 | 0,22 | 0,75 | 0,93 | 1,02 | 1,14 | 1,28 | 1,47 | 1,53 | 1,57 | 1,60 |




```
Ф3-Ф1=20E-5 Вб

L1=0,4  L2=0,15 L3=0,3 М
S1=0,0008 S2=0,0008 S3=0,0008 М²
I1=0,25 I2=0,2    А
W1=423  W2=152  W3=969
Определить I3, Ф1
```

Рисунок 15 – Схема магнитной цепи

## Методические указания к выполнению задания 3

На основании законов Кирхгофа составим систему из трёх уравнений для расчёта магнитной цепи. При этом примем, что магнитные потоки $\Phi_1, \Phi_2$ и $\Phi_3$ направлены к точке *d*.

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0;$$

$$H_1 L_1 - H_2 L_2 = I_1 W_1 - I_2 W_2;$$

$$H_2L_2 - H_3L_3 = I_2W_2 - I_3W_3.$$

Учитывая условие $\Phi_3 - \Phi_1 = 0{,}0002\,Вб$, выразим из него магнитный поток $\Phi_3 = 0{,}0002 + \Phi_1$ и, подставив его в исходную систему уравнения, получим:

$$2\Phi_1 + \Phi_2 + 0{,}0002 = 0;$$

$$H_1L_1 - H_2L_2 = I_1W_1 - I_2W_2;$$

$$H_2L_2 - H_3L_3 = I_1W_2 - I_3W_3.$$

Из полученной системы уравнений будем решать систему первых двух уравнений методом простой итерации, для этого представим её в следующем виде, т. е. искомые неизвестные выразим через самих себя и другие неизвестные:

$$3\Phi_1 + \Phi_2 + 0{,}0002 = \Phi_1;$$

$$H_1L_1 + H_2L_2 = I_1W_1 - I_2W_2 + 2H_2L_2;$$

Из этой системы двух уравнений выразим неизвестные с учетом критериев сходимости процесса вычислений:

$$B_1 = (B_1S_1 - B_2S_2 - 0{,}0002)/3S_1;$$

$$H_2 = (H_1L_1 + H_2L_2 - I_1W_1 + I_2W_2)/2L_2.$$

Неизвестные $B_1$ и $H_2$ выражены через свои же значения, которые получены из предыдущей итерации, либо взяты как начальные приближения неизвестных. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока изменения всех неизвестных, двух последовательных итераций не станут малыми.

Если магнитопровод имеет воздушный зазор, то напряжённость в нём находится по формуле:

$$\text{Н}_{\text{в.з.}} = B/M_0 = 0{,}8 \times 1000000\ B,$$

где $M_0$ – магнитная постоянная.

Определив магнитную индукцию $B_1$, найдём магнитный поток $\Phi_1$:

$$\Phi_1 = B_1 S_1.$$

Определив магнитный поток $\Phi_1$, найдём магнитный поток $\Phi_3$, магнитную индукцию $B_3$ и напряжённость $H_3$:

$$\Phi_3 = 0{,}0002 + \Phi_1;$$

$$B_3 = \Phi_3 / S_3;$$

$$H_3 = f(B_3).$$

Ток $I_3$ определим из третьего уравнения:

$$I_3 = (-H_2 L_2 + H_3 L_3 + I_2 W_2) / W_3.$$

Взаимосвязь параметров $B$ и $H$, характеризующих магнитные свойства стали, определялась путём квадратичной интерполяции.

Блок-схема алгоритма решения рассматриваемой задачи представлена на рисунке 16, при этом блок-схема алгоритма подпрограммы квадратичной интерполяции для определения взаимосвязи между параметрами $B$ и $H$ представлена на рисунке 17.

В первом блоке приведённой схемы алгоритма производится ввод исходных данных: магнитных свойств стали в виде таблицы параметров $B$ и $H$, длин и площадей поперечных сечений стержней магнитопровода, токов и числа витков в катушках магнитопровода. Во втором блоке производится ввод начальных приближений неизвестных параметров $B_1$ и $B_2$. Начиная с 3 и включая 11, 16, 17 блоки проводится решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации, при этом в блоках 10 и 11 проводится проверка точности решения системы. В блоках 12–14 ведется расчет магнитной индукции $B_3$ и тока катушки $I_3$. Блок-схема заканчивается выводом искомых параметров (блок 15).

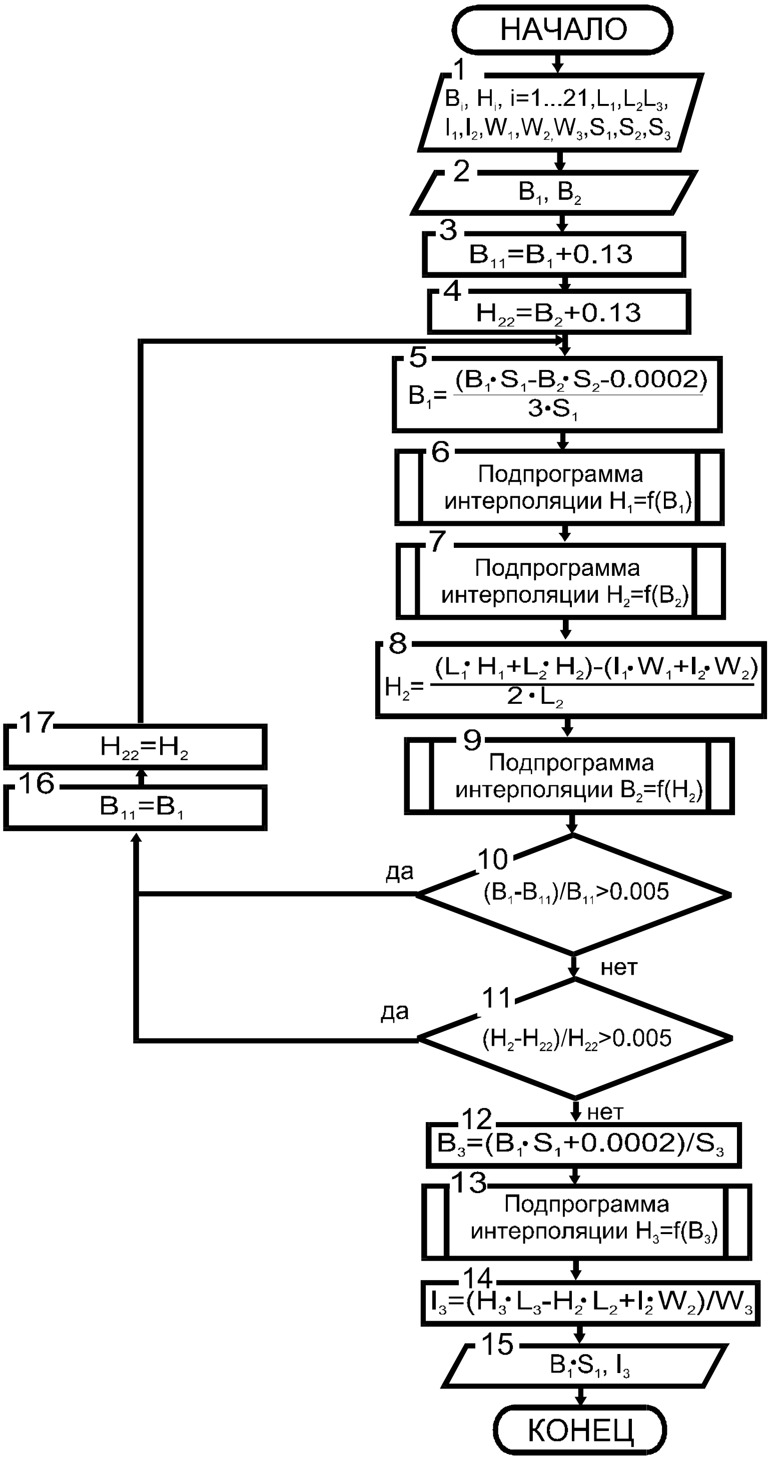



Рисунок 16 – Блок-схема алгоритма расчета магнитной цепи

Определение взаимосвязи между параметрами *B* и *H* проводилось согласно алгоритма квадратичной интерполяции. При этом на магнитную индукцию *B* были наложены ограничения так, что она никогда не принимает значения больше 1,6 Тл ($B$ = 1,6), но и меньше – 1,6 Тл ($B$ = –1,6).

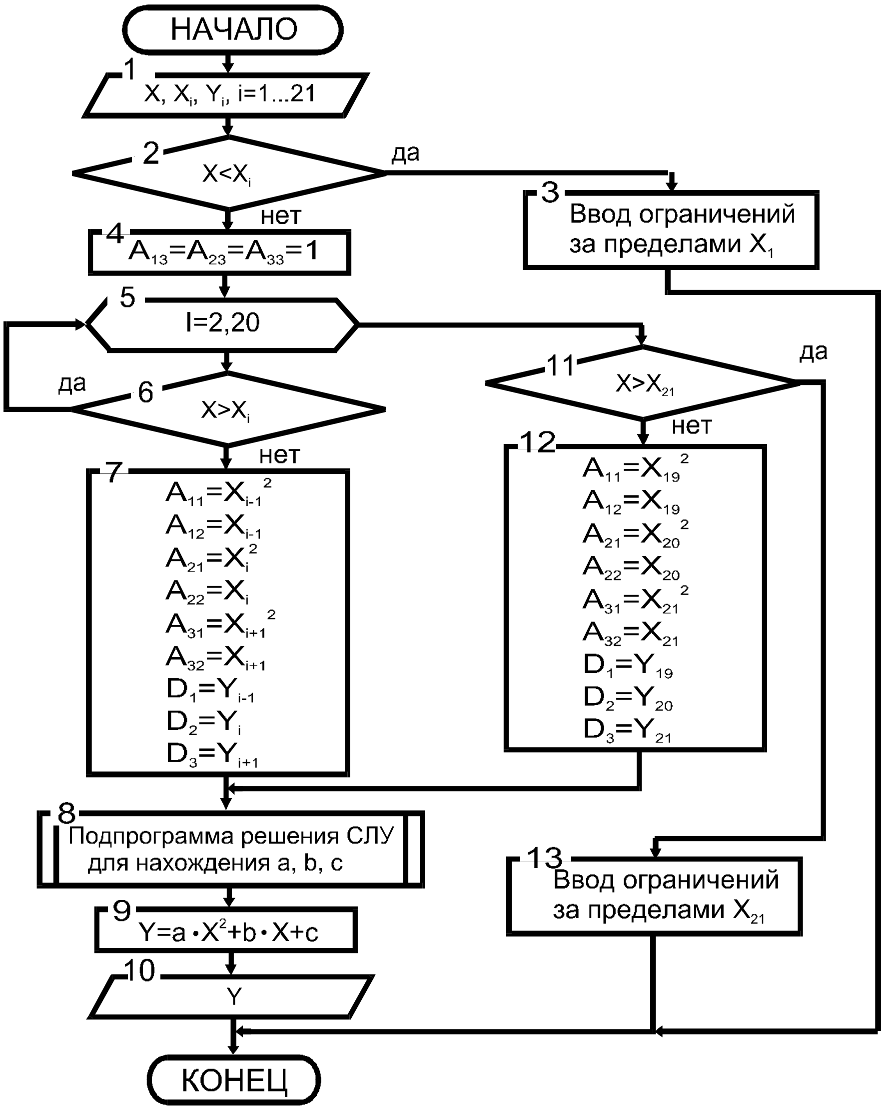



Рисунок 17 – Блок-схема алгоритма квадратичной интерполяции

За пределами граничных значений $B$, напряжённость магнитного поля $H$, соответственно ограничивалась выражением $H = 1200 + (B - 1{,}6) \times 100000$, когда магнитная индукция превышала значение $B = 1{,}6$ Тл и выражением $-H = -1200 + (B + 1{,}6) \times 100000$, когда магнитная индукция была меньше значения $B = -1{,}6$ Тл. На основании разработанного алгоритма составлены программы на **Pascal** и **Basic** для решения данной задачи на ЭВМ (программа 10 и 11). Последовательность ее операторов соответствует разработанной блок-схеме алгоритма.

Пример решения задания 3 на языке **Pascal**.

Программа 10

```
Label M1;
Const H: Array [1..21] of real=(-1200,-800,-600,-400,-200,-120,-80,
    -60,-40,-0,0,20,40,60,80,120,200,400,600,800,1200);
  B: Array [1..21] of real=(-1.6,-1.57,-1.53,-1.47,-1.28,-1.14,
-1.02,-0.93,-0.75,-0.22,0,0.22,0.75,0.93,1.02,1.14,1.28,1.47,1.53,1.57,1.6);
var
 A : array [1..3,1..3] of real;
 D,X : array [1..3] of real;
 b3,h3,bo,ho,h22,b11,
 L1,L2,L3,i1,i2,i3,w1,w2,w3,s1,s2,s3,b1,b2,h1,h2 :
real;
Procedure RSLU;
var i,j,n,N1,N2,K,L : Integer;
 M,P,HH,C,S : Real;
Begin
 n:=3;
 For j:=1 to n do
 Begin
  N1:=N-1;
  M:=Abs(A[j,j]);
  For i:=j to n do If M<=Abs(A[i,j]) Then
  Begin M:=Abs(A[i,j]); N2:=i; end;
  For K:=j to n do
  Begin
   P:=A[j,k];
   A[j,k]:=A[n2,k];
   A[n2,k]:=P;
  end;
  HH:=D[j];
  D[j]:=D[N2];
  D[N2]:=HH;
  For i:=j to N1 do
  Begin
   C:=A[i+1,j]/A[j,j];
   For L:=j to n do
   A[i+1,L]:=A[i+1,L]-A[j,L]*C;
   D[i+1]:=D[i+1]-D[j]*C;
  end;
 end;
 X[n]:=D[n]/A[n,n];
 For i:=N1 downto 1 do
 Begin
  S:=0;
```

```
  For j:=i+1 to n do
  S:=S+X[j]*A[i,j];
  X[i]:=(D[i]-S)/A[i,i];
 end;
end;
Function InterpolH(boo:real):real;
Label M3;
var hoo : real;
 i : Integer;
Begin
 If boo<=-1.6 then Begin hoo:=-1200+(boo+1.6)*100000;
Goto M3; end;
 A[1,3]:=1; A[2,3]:=1; a[3,3]:=1;
 For i:=2 to 20 do If boo<=b[i] then
 Begin
  A[1,1]:=B[i-1]*B[i-1];
  A[1,2]:=B[i-1];
  A[2,1]:=B[i]*B[i];
  A[2,2]:=B[i];
  A[3,1]:=B[i+1]*B[i+1];
  A[3,2]:=B[i+1];
  D[1]:=H[i-1];
  D[2]:=H[i];
  D[3]:=H[i+1];
  RSLU;
  hoo:=X[1]*boo*boo+X[2]*boo+X[3];
  Goto M3;
 end;
 If boo>b[21] then Begin hoo:=1200+(boo-1.6)*100000;
Goto M3; end;
 A[1,1]:=B[19]*B[19];
 A[1,2]:=B[19];
 A[2,1]:=B[20]*B[20];
 A[2,2]:=B[20];
 A[3,1]:=B[21]*B[21];
 A[3,2]:=B[21];
 D[1]:=H[19];
 D[2]:=H[20];
 D[3]:=H[21];
 RSLU;
 hoo:=X[1]*boo*boo+X[2]*boo+X[3];
M3: InterpolH:=hoo;
end;
Function InterpolB(hoo:real):real;
Label M4;
```

```
var boo : real;
 i : Integer;
Begin
 If hoo<=-1200 then Begin boo:=-1.6; Goto M4; end;
 A[1,3]:=1; A[2,3]:=1; a[3,3]:=1;
 For i:=2 to 20 do If hoo<=h[i] then
 Begin
  A[1,1]:=h[i-1]*h[i-1];
  A[1,2]:=h[i-1];
  A[2,1]:=h[i]*h[i];
  A[2,2]:=h[i];
  A[3,1]:=h[i+1]*h[i+1];
  A[3,2]:=h[i+1];
  D[1]:=b[i-1];
  D[2]:=b[i];
  D[3]:=b[i+1];
  RSLU;
  boo:=X[1]*hoo*hoo+X[2]*hoo+X[3];
  Goto M4;
 end;
 If hoo>h[21] then Begin boo:=1.6; Goto M4; end;
 A[1,1]:=h[19]*h[19];
 A[1,2]:=h[19];
 A[2,1]:=h[20]*h[20];
 A[2,2]:=h[20];
 A[3,1]:=h[21]*h[21];
 A[3,2]:=h[21];
 D[1]:=b[19];
 D[2]:=b[20];
 D[3]:=b[21];
 RSLU;
 boo:=X[1]*hoo*hoo+X[2]*hoo+X[3];
M4: InterpolB:=boo;
end;
Begin
 Writeln ('Введите исходные данные
L1,L2,L3,i1,i2,w1,w2,w3,s1,s2,s3');
 Readln (L1,L2,L3,i1,i2,w1,w2,w3,s1,s2,s3);
 Writeln ('Задайте магнитные индукции B1 и B2');
 Readln (b1,b2);
 b11:=b1+0.13;
 h22:=b2+0.13;
M1: b1:=(b1*s1-b2*s2-0.0002)/(3*s1);
 bo:=b1;
 ho:=interpolH(bo);
```

```
 h1:=ho;
 bo:=b2;
 ho:=interpolH(bo);
 h2:=ho;
 h2:=(L1*h1+L2*h2-i1*w1+i2*w2)/(2*L2);
 ho:=h2;
 bo:=interpolB(ho);
 b2:=bo;
 If (Abs((b1-b11)/b11)>0.005) OR (Abs((h2-
h22)/h22)>0.005)
  Then Begin b11:=b1; h22:=h2; Goto M1; end;
 b3:=((b1*s1)+0.0002)/s3;
 bo:=b3;
 ho:=interpolH(bo);
 h3:=ho;
 i3:=(h3*L3-h2*L2+i2*w2)/w3;
 Writeln('Ф1=',b1*s1,' Ф2=',b2*s2,' Ф3=',b3*s3);
 Writeln('SUM_Ф=',b1*s1+b2*s2+b3*s3,' I3=',i3);
end.
```

Пример решения задания 3 на языке **Basic**.

Программа 11

```
10 DIM H(21),B(21),A(3,3),D(3),X(3)
20 DATA -1200,-1.6,-800,-1.57,-600,-1.53,-400,-1.47,-200,-1.28
30 DATA -120,-1.14,-80,-1.02,-60,-0.93,-40,-0.75,-20,-0.22
40 DATA 0,0,20,0.22,40,0.75,60,0.93,80,1.02,120,1.14,200,1.28
50 DATA 400,1.47,600,1.53,800,1.57,1200,1.6
60 FOR I=1 TO 21
70 READ H(I),B(I)
80 NEXT I
90 PRINT "ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ"
100  PRINT "L1,L2,L3,I1,I2,I3,W1,W3,S1,S2,S3"
110  INPUT L1,L2,L3,I1,I2,W1,W2,W3,S1,S2,S3
120 PRINT "ЗАДАЙТЕ МАГНИТНЫЕ ИНДУКЦИИ B1 И B3"
130 INPUT B1,B3
140 B11=B1
150 B1=(B1*S1-B3*S3-0.0007)/(2*S1)
160 B=B1
170 GOSUB 400
180 H1=H
190 B=B3
200 GOSUB 400
210 H3=H
220 H33=H3
```

```
230 H3=(L1*H1+L3*H3-I1*W1-I3*W3)/(2*L3)
240 H=H3
250 GOSUB 750
260 B3=B
270 IF ABS((B1-B11)/B11)>0.005 THEN 300
280 IF ABS((H3-H33)/H33)>0.005 THEN 300
290 GOSUB 330
300 B11=B1
310 H33=H3
320 GOTO 150
330 B2=(0.0007/S2)
340 B=B2
350 GOSUB 400
360 H2=H
370 W2=(H3*L3-H2*L2+I3*W3)/I2
380 PRINT "Φ1="B1*S1,"W2="W2
390 STOP
400 IF B<=-1.6 THEN 730
410 A(1,3)=1
420 A(2,3)=1
430 A(3,3)=1
440 FOR I=2 TO 20
450 IF B>B(I) THEN 580
460 A(1,1)=B(I-1)^2
470 A(1,2)=B(I-1)
480 A(2,1)=B(I)^2
490 A(2,2)=B(I)
500 A(3,1)=B(I+1)^2
510 A(3,2)=B(I+1)
520 D(1)=H(I-1)
530 D(2)=H(I)
540 D(3)=H(I+1)
550 GOSUB 1100
560 H=X(1)*B*B+X(2)*B+X(3)
570 GOTO 740
580 NEXT I
590 IF B>B(21) THEN 710
600 A(1,1)=B(19)^2
610 A(1,2)=B(19)
620 A(2,1)=B(20)^2
630 A(2,2)=B(20)
640 A(3,1)=B(21)^2
650 A(3,2)=B(21)
660 D(1)=H(19)
670 D(2)=H(20)
```

```
680 D(3)=H(21)
690 GOSUB 1100
700 GOTO 560
710 H=1200+(B-1.6)*100000
720 GOTO 740
730 H=-1200-(B+1.6)*100000
740 RETURN
750 IF H<-1200 THEN 1080
760 A(1,3)=1
770 A(2,3)=1
780 A(3,3)=1
790 FOR I=2 TO 20
800 IF H>H(I) THEN 930
810 A(1,1)=H(I-1)^2
820 A(1,2)=H(I-1)
830 A(2,1)=H(I)^2
840 A(2,2)=H(I)
850 A(3,1)=H(I+1)^2
860 A(3,2)=H(I+1)
870 D(1)=B(I-1)
880 D(2)=B(I)
890 D(3)=B(I+1)
900 GOSUB 1100
910 B=X(1)*H*H+X(2)*H+X(3)
920 GOTO 1090
930 NEXT I
940 IF H>H(21) THEN 1060
950 A(1,1)=H(19)^2
960 A(1,2)=H(19)
970 A(2,1)=H(20)^2
980 A(2,2)=H(20)
990 A(3,1)=H(21)^2
1000 A(3,2)=H(21)
1010 D(1)=B(19)
1020 D(2)=B(20)
1030 D(3)=B(21)
1040 GOSUB 1100
1050 GOTO 910
1060 B=1.6
1070 GOTO 1090
1080 B=-1.6
1090 RETURN
1100 N=3
1110 FOR J=1 TO N
1120 N1=N-1
```

```
1130 M=ABS(A(J,J))
1140 FOR I=J TO N
1150 IF M>ABS(A(I,J)) THEN 1180
1160 M=ABS(A(I,J))
1170 N2=I
1180 NEXT I
1190 FOR K=J TO N
1200 P=A(J,K)
1210 A(J,K)=A(N2,K)
1220 A(N2,K)=P
1230 NEXT K
1240 HH=D(J)
1250 D(J)=D(N2)
1260 D(N2)=HH
1270 FOR I=J TO N1
1280 C=A(I+1,J)/A(J,J)
1290 FOR L=J TO N
1300 A(I+1,L)=A(I+1,L)-A(J,L)*C
1310 NEXT L
1320 D(I+1)=D(I+1)-D(J)*C
1330 NEXT I
1340 NEXT J
1350 X(N)=D(N)/A(N,N)
1360 FOR I=N1 TO 1 STEP (-1)
1370 S=0
1380 FOR J=I+1 TO N
1390 S=S+X(J)*A(I,J)
1400 NEXT J
1410 X(I)=(D(I)-S)/A(I,I)
1420 NEXT I
1430 RETURN
1440 END
```

Для решения задачи в пакете **Matlab** из исходных уравнений

$$2B_1S_1 + B_2S_2 + 0{,}0002 = 0;$$

$$H_1L_1 - H_2L_2 = I_1W_1 - I_2W_2.$$

выразим неизвестные:

$$B_1 = (-B_2S_2 - 0{,}0002)/(2S_1);$$

$$H_2 = (H_1L_1 - I_1W_1 + I_2W_2)/L_2.$$

Далее приведем их к виду $F(x) = 0$.

$$F(1) = B_1 + (B_2 S_2 + 0{,}0002)/(2S_1) = 0;$$

$$F(2) = H_2 - (H_1 L_1 - I_1 W_1 + I_2 W_2)/L_2 = 0.$$

При решении задачи с использованием функции **fsolve** значения $B_1$ и $H_2$ будут записаны в массив *bh* следующим образом: $bh(1)=B_1$, $bh(2)=H_2$.

Пример выполнения задания 3 в пакете **Matlab**.

Программа 12

```
function magnit
H=[-1200 -800 -600 -400 -200 -120 -80 -60 -40 -20 ...
 0 20 40 60 80 120 200 400 600 800 1200];
B=[-1.6 -1.57 -1.53 -1.47 -1.28 -1.14 -1.02 -0.93 -0.75 -0.22 ...
 0 0.22 0.75 0.93 1.02 1.14 1.28 1.47 1.53 1.57 1.6];
L1=0.4; L2=0.15; L3=0.3; i1=0.25; i2=0.2;
s1=0.0008; s2=0.0013; s3=0.001; w1=423; w2=152; w3=969;
bh=fsolve(@syst,[1 1],
optimset('fsolve'),B,H,s1,s2,L1,L2,i1,i2,w1,w2);
b3=(bh(1)*s1+0.0002)/s3;
h3=interp1(B,H,b3,'cubic'); h2=bh(2);
b1=bh(1); b2=interp1(H,B,h2,'cubic');
i3=(h3*L3-h2*L2+i2*w2)/w3;
f1=b1*s1; f2=b2*s2; f3=0.0002+f1; sumf=f1+f2+f3;
disp({'f1' f1; 'f2' f2; 'f3' f3; 'sumf' sumf; 'i3' i3})
function F=syst(bh,B,H,s1,s2,L1,L2,i1,i2,w1,w2);
F(1)=bh(1)+(interp1(H,B,bh(2),'cubic')*s2+0.0002)/(2*s1);
F(2)=bh(2)-(interp1(B,H,bh(1),'cubic')*L1-i1*w1+i2*w2)/L2;
```

Результаты расчета

```
'f1'    [8.0585e – 004]
'f2'    [ – 0.0018]
'f3'    [ 0.0010]
'sumf'  [5.3343e – 017]
'i3'    [0.1011]
```

В примере программы использована функция Matlab:

**fsolve** – решение нелинейных уравнений и систем вида $f(x) = 0$.

Левая часть уравнения или системы $f(x) = 0$ должна быть запрограммирована в файл-функции **funname**.

Один из вариантов обращения:

**x = fsolve(@funname,x0,options,p1, p2,...)** – решение нелинейных уравнений и систем при фиксированных значениях параметров **p1, p2, ...,** от которых зависит левая часть системы **f (x,p1,p2, ...), x0** – начальное приближение переменных **x, options –** аргумент, создаваемый функцией **optimset.**

options = optimset('param1',value1,'param2',value2,...)

Примеры:

options = optimset('Display','iter',"TolX',1e-4)

x = fsolve(@funname,x0,options)

или **x = fsolve(@funname,x0,optimset('Display','iter',"TolX',1e-4))**

Пример выполнения задания 3 в пакете Excel. Для решения этой задачи на рабочем листе Excel организуем следующую таблицу:

Таблица 14 – Исходные данные

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | L1= | 0,4 | | H | B | Втеор | (B-Bт)^2 | | |
| 2 | L2= | 0,15 | | 0 | 0 | | | H1= | 100 |
| 3 | L3= | 0,3 | | 20 | 0,22 | | | H2= | 100 |
| 4 | S1= | 0,0008 | | 40 | 0,75 | | | | |
| 5 | S2= | 0,0013 | | 60 | 0,93 | | | | |
| 6 | S3= | 0,001 | | 80 | 1,02 | | | Ф1= | |
| 7 | I1= | 0,25 | | 120 | 1,14 | | | Ф3= | |
| 8 | I2= | 0,2 | | 200 | 1,28 | | | B3= | |
| 9 | W1= | 423 | | 400 | 1,47 | | | H3= | 100 |
| 10 | W2= | 152 | | 600 | 1,53 | | | | |
| 11 | W3= | 969 | | 800 | 1,57 | | | I3= | |
| 12 | | | | 1200 | 1,6 | | | Ф2= | |
| 13 | | | | | a= | 1 | | SUM= | |
| 14 | | | | | b= | 1 | | | |

Кривая намагничивания в 1-й четверти хорошо аппроксимируется функцией:

$$y = \frac{x}{ax + b} \Rightarrow B = \frac{H}{aH + b}.$$

Чтобы кривую намагничивания вычислять также в области отрицательных значений функцию запишем в виде:

$$B = \frac{H}{a|H| + b}.$$

F2) `=D2/(F$13*D2+F$14)`
G2) `=(E2-F2)^2`

Содержимое ячеек F2, G2 копируется в ячейки F3–F12 и G3–G12.

G13) `=СУММ(G2:G12)`

Затем в подразделе **«Поиск решения»** раздела **«Сервис»** главного меню формируем условие оптимизации (минимум целевой функции в ячейке G13) и параметры оптимизации (ячейки изменения F13:F14). После чего проводим запуск на выполнение оптимизации.

По схеме магнитопровода:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0;$$

$$H_1 L_1 - H_2 L_2 = I_1 W_1 - I_2 W_2;$$

$$H_2 L_2 - H_3 L_3 = I_2 W_2 - I_3 W_3.$$

Учитывая условие $\Phi_3 - \Phi_1 = 0{,}0002 \ \text{Вб}$, выразим из него магнитный поток $\Phi_3 = 0{,}0002 + \Phi_1$ и, подставив его в исходную систему уравнения, получим:

$$2\Phi_1 + \Phi_2 + 0{,}0002 = 0;$$

$$H_1 L_1 - H_2 L_2 = I_1 W_1 - I_2 W_2;$$

$$H_2 L_2 - H_3 L_3 = I_1 W_2 - I_3 W_3.$$

Для решения задачи в электронных таблицах первые два уравнения запишем в следующем виде:

$$\frac{2H_1S_1}{a|H_1|+b}+\frac{H_2S_2}{a|H_2|+b}+0{,}0002=0$$

$$H_1L_1-H_2L_2=I_1W_1-I_2W_2;$$

Сложим два этих уравнения:

$$\frac{2H_1S_1}{a|H_1|+b}+\frac{H_2S_2}{a|H_2|+b}+0{,}0002+H_1L_1-H_2L_2-I_1W_1+I_2W_2=0.$$

Полученное уравнение записывается в ячейку I5. В ячейки I2, I3 записываются начальные значения $H_1$ и $H_2$.

I5) `=(2*I2*B4)/(F13*ABS(I2)+F14)+(I3*B5)/(F13*ABS(I3)+F14)+0,0002+I2*B1-I3*B2-B7*B9+B8*B10`

В подразделе **«Поиск решения»** раздела **«Сервис»** главного меню формируем условие оптимизации (цель = 0, в ячейке I5) и параметры оптимизации (ячейки изменения I2:I3). После чего проводим запуск на выполнение оптимизации.

В результате оптимизации получаем уточненные значения $H_1$ и $H_2$. По которым находятся $\Phi_1$ и $\Phi_2$.

$$\Phi_3=0{,}0002+\Phi_1;$$

$$B_3=\Phi_3/S_3;$$

Ток $I_3$ определим из третьего уравнения:

$$I_3=(-H_2L_2+H_3L_3+I_2W_2)/W_3.$$

Полученные уравнения записываются в ячейки I7, I8, I11. В ячейку I9 записывается начальное значение $H_3$. В ячейку I10 записывается разность между $B_3$ найденным в ячейке I8 и найденным по оптимизируемому $H_3$.

I6) `=I2/(F13*ABS(I2)+F14)*B4`

I7) `=I6+0,0002`
I8) `=I7/B6`
I10) `=I9/(F13*ABS(I9)+F14)-I8`
I11) `=(I3*B2+I9*B3+B8*B10)/B11`
I12) `=I3/(F13*ABS(I3)+F14)*B5`

В подразделе **«Поиск решения»** раздела **«Сервис»** главного меню формируем условие оптимизации (цель = 0, в ячейке I10) и параметр оптимизации (ячейка изменения I9). После чего проводим запуск на выполнение оптимизации.

В результате оптимизации получаем уточненное значение $H_3$ по которому находится $I_3$.

В ячейку I13 записывается формула для контроля суммы магнитных потоков.

## Вопросы для самопроверки

1 Дайте основные понятия НУ и их систем.

2 Классификация методов решения НУ и их систем.

3 Изложите сущность метода простых итераций для решения НУ и их систем.

4 Дайте понятие сходимости и расходимости итерационных методов, а также критериев их оценки.

5 Изложите сущность метода деления отрезка пополам.

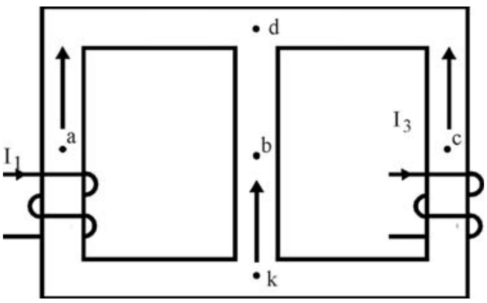
6 Изложите сущность метода хорд.

7 Изложите сущность метода касательных.

## Индивидуальные задания

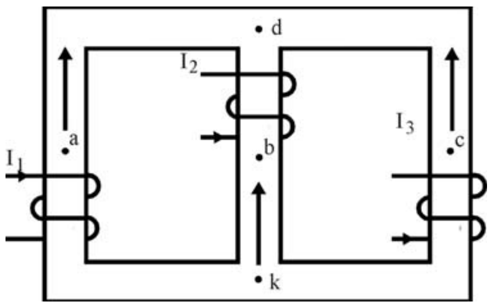
По заданному варианту разработать ММ, блок-схему алгоритма и программу на алгоритмическом языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах для расчёта магнитных потоков в стержнях заданной магнитной цепи. Магнитные свойства стали, из которой выполнены стержни, выражаются кривой намагничивания, заданной в виде таблицы 13.

### Вариант 1



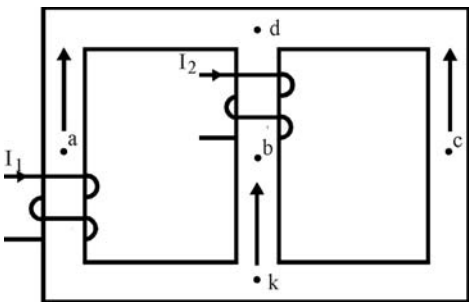

Ф1=Ф3
L1=0,48 L2=0,3 L3=0,52 М
S1=0,00249 S2=0,00515
S3=0,00515 $М^2$
I1= 1,0 А
W1= 350 W3= 302
ОПРЕДЕЛИТЬ I3,Ф2

### Вариант 2



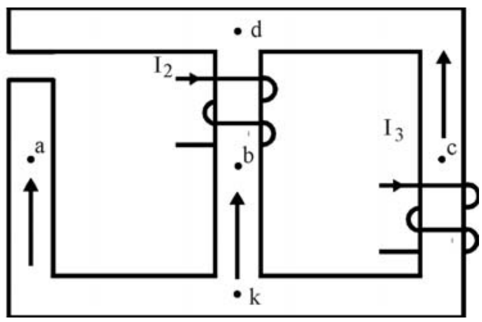

Ф1=25Е-5 Вб
L1=0,13 L2=0,03 L3=0,11 М
S1=0,000205 S2=0,000094
S3=0,000118 $М^2$
I2= 0,02 I3= 0,15 А
W1= 107 W2= 992 W3= 136
ОПРЕДЕЛИТЬ I1,Ф3

### Вариант 3



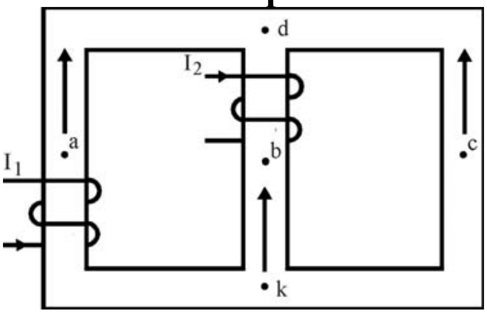

Ф2-Ф1=20Е-5 Вб
L1=0,45 L2=0,14 L3=0,35 М
S1=0,00031 S2=0,00053
S3=0,00078 $М^2$
I1= 0,3 А
W1= 195 W2= 390
ОПРЕДЕЛИТЬ I2,Ф2

### Вариант 4



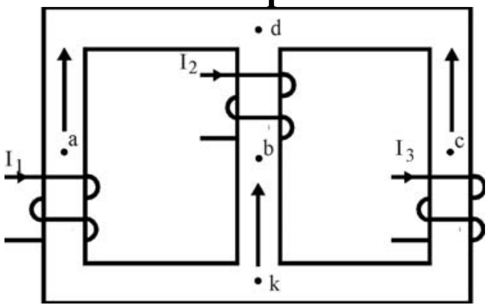

L1=0,195 L2=0,1 L3=0,242 М
Lвоздушного зазора=0,0001 М
S1=0,00077 S2=0,00021
S3=0,00018 $М^2$
I2= 0,5 I3= 0,2 А
W2= 197 W3= 755
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф2,Ф1

## Вариант 5



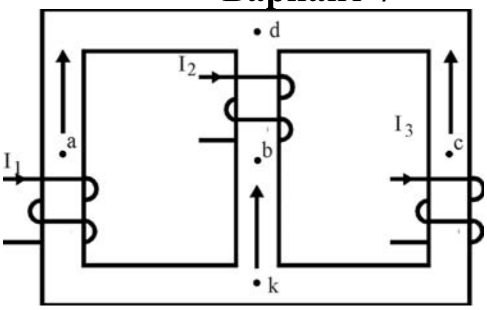

Ф1=Ф2
L1=0,18 L2=0,1 L3=0,25 М
S1=0,00049 S2=0,0005
S3=0,00095 $М^2$
I1= 0,25 I2= 0,2 А
W1= 200
ОПРЕДЕЛИТЬ W2,Ф1

## Вариант 6



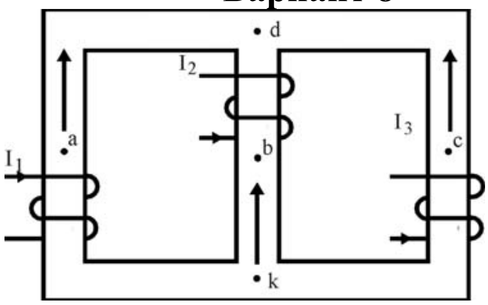

Ф3=98E-5 Вб
L1=0,32 L2=0,125 L3=0,33 М
S1=0,00081 S2=0,00141
S3=0,00069 $М^2$
I1= 0,2 I2= 0,3 А
W1= 717 W2= 174 W3=1998
ОПРЕДЕЛИТЬ I3,Ф1

## Вариант 7



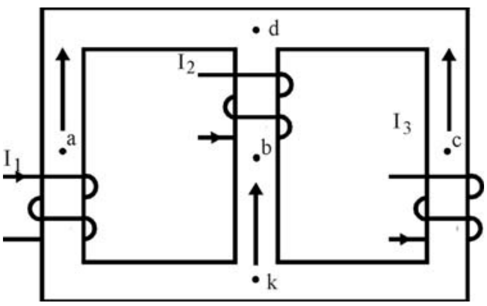

Ф3=98E-5 Вб
L1=0,26 L2=0,11 L3=0,39 М
S1=0,00079 S2=0,00136
S3=0,00072 $М^2$
I1= 1,0 I2= 0,5 А
W1= 137 W2= 106 W3=1998
ОПРЕДЕЛИТЬ I3,Ф2

## Вариант 8



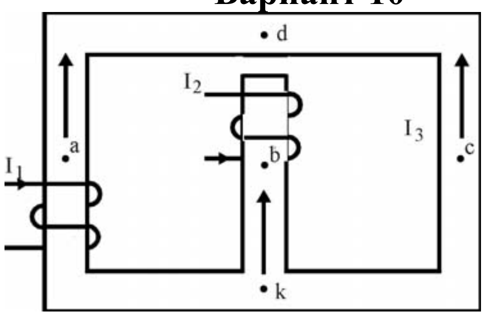

Ф2-Ф1=20E-5 Вб
L1=0,35 L2=0,06 L3=0,25 М
S1=0,00041 S2=0,00063
S3=0,00096 $М^2$
I1= 1,0 I3= 0,2 А
W1= 19 W2= 268 W3= 401
ОПРЕДЕЛИТЬ I2,Ф3

## Вариант 9



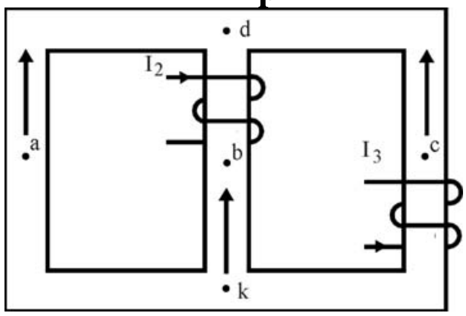

Ф2=70E-5 Вб
L1=0,2  L2=0,09 L3=0,15 М
S1=0,00077 S2=0,00049
S3=0,00026 $М^2$
I1= 0,59 I2= 0,1 I3= 0,7 А
W1= 104 W3= 20
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф3,W2

## Вариант 10



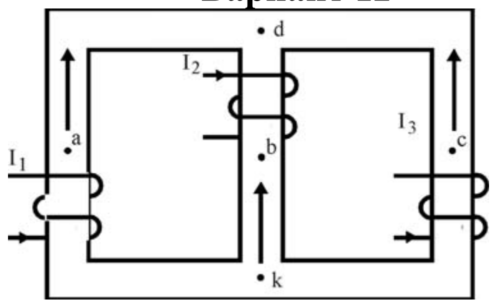

L1=1,0 L2=0,28 L3=0,95 М
Lвоздушного зазора=0,00048 М
S1=0,0104 S2=0,0182
S3=0,02 $М^2$
I1= 2,4 I2= 2,8 А
W1= 127 W2= 133
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф3,Ф1

## Вариант 11



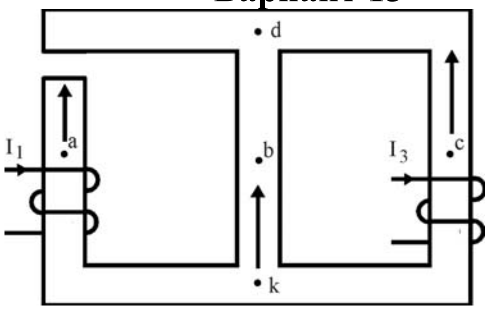

Ф2=Ф3
L1=0,4 L2=0,13 L3=0,5 М
S1=0,00118 S2=0,0011 S3=0,00093 М$^2$
I2= 2,2 А
W2= 98 W3= 514
ОПРЕДЕЛИТЬ I3,Ф2

## Вариант 12



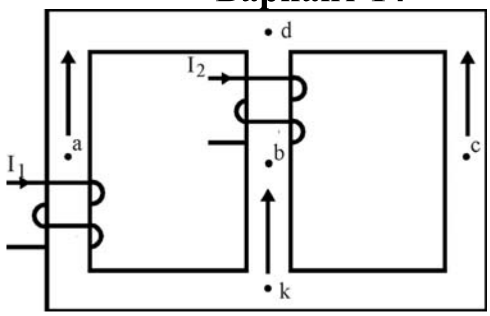

Ф2-Ф1=30E-5 Вб
L1=0,34 L2=0,12 L3=0,28 М
S1=0,00095 S2=0,0008
S3=0,00156 М$^2$
I1= 0,1 I2= 0,2 I3= 2,5 А
W1= 168 W3= 53
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф3,W2

## Вариант 13



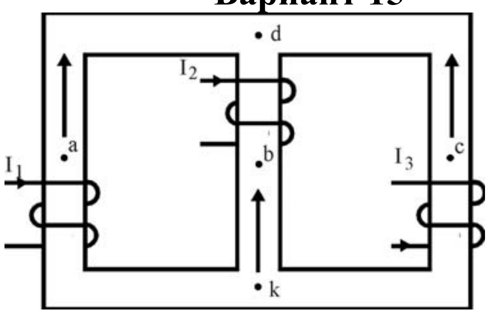

L1=0,35 L2=0,08 L3=0,2 М
Lвоздушного зазора=0,0005 М
S1=0,00041 S2=0,00058
S3=0,00038 М$^2$
I1= 1,3 I3= 0,5 А
W1= 355 W3= 503
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф2,Ф1

## Вариант 14



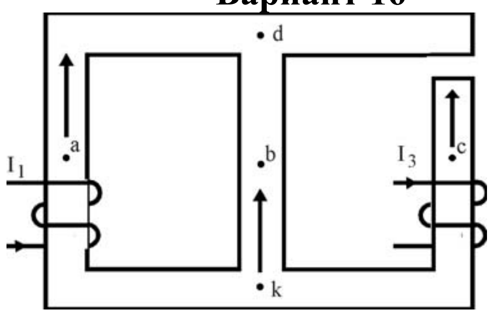

Ф1=Ф2
L1=0,9 L2=0,3 L3=0,85 М
S1=0,0006 S2=0,0004
S3=0,00097 М$^2$
I1= 1,8 I2= 1,1 А
W1= 108
ОПРЕДЕЛИТЬ W2,Ф2

## Вариант 15




Ф2=0
L1=0,15 L2=0,06 L3=0,2 М
S1=0,00038 S2=0,0002
S3=0,00048 М$^2$
I1= 0,5 I3= 0,15 А
W1= 58 W2= 294 W3= 357

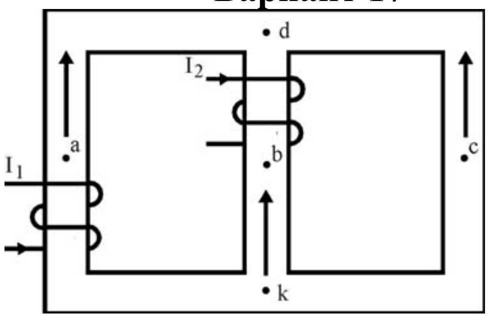
## Вариант 16




L1=0,35 L2=0,18 L3=0,4 М
Lвоздушного зазора=0,001 М
S1=0,00146 S2=0,00102
S3=0,0015 М$^2$
I1= 0,3 I3= 0,2 А
W1= 900 W3= 996
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф1,Ф3

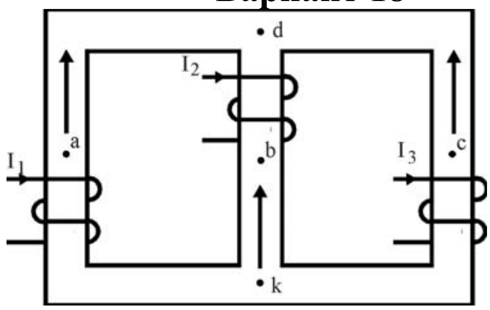
ОПРЕДЕЛИТЬ I2,Ф1

## Вариант 17



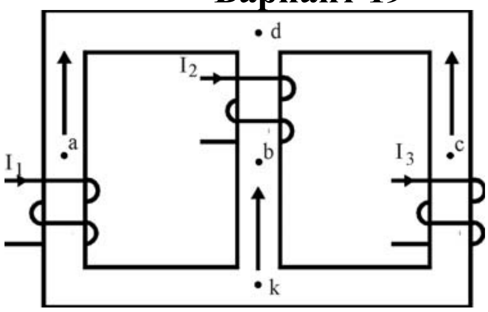

Ф2=Ф3
L1=0,3 L2=0,17 L3=0,45 М
S1=0,0038 S2=0,00147 S3=0,00154 М$^2$
I1= 0,25 I2= 0,3 А
W1= 599
ОПРЕДЕЛИТЬ W2,Ф3

## Вариант 18



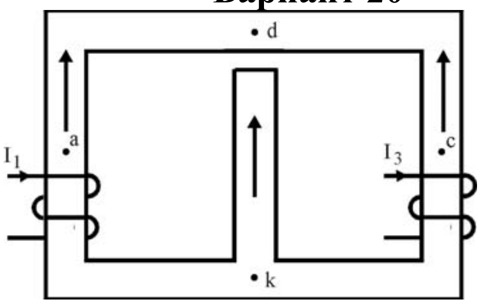

Ф2=0
L1=0,25 L2=0,1 L3=0,29 М
S1=0,0004 S2=0,00048 S3=0,00048 М$^2$
I1= 0,2 I2= 0,1 I3= 0,05 А
W1= 1069 W3= 1992
ОПРЕДЕЛИТЬ W2,Ф3

## Вариант 19



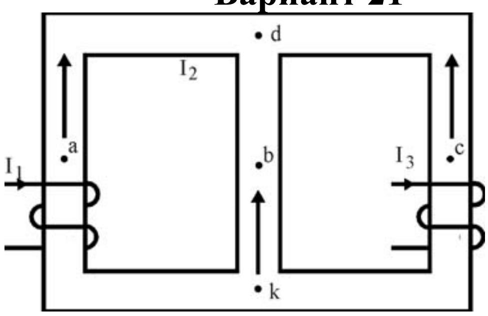

Ф2-Ф3=20Е-5 Вб
L1=0,2  L2=0,07 L3=0,17 М
S1=0,00082 S2=0,00052
S3=0,00036 М$^2$
I1= 0,1 I2= 0,2 А
W1= 621 W2= 100 W3= 150
ОПРЕДЕЛИТЬ I3,Ф1

## Вариант 20



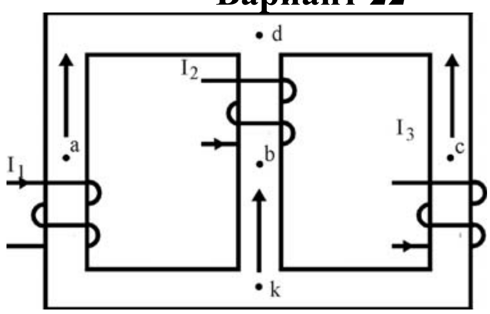

L1=0,58 L2=0,19 L3=0,55 М
Lвоздушного зазора=0,00125 М
S1=0,0058 S2=0,0084 S3=0,0055 М$^2$
I1= 1,3 I3= 0,4 А
W1= 203 W3= 572
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф2,Ф1

## Вариант 21




Ф1=Ф3
L1=0,45 L2=0,27 L3=0,48 М
S1=0,00247 S2=0,00504
S3=0,00475 М$^2$
I1= 0,5 А
W1= 700  W3= 302

## Вариант 22

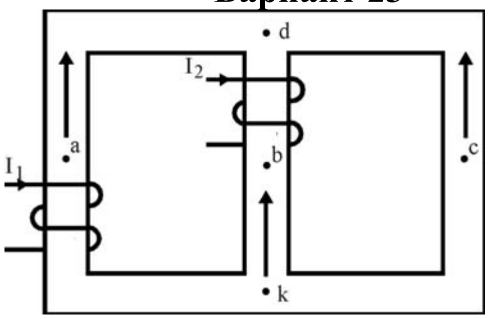



Ф1=25Е-5 Вб
L1=0,1  L2=0,045 L3=0,14  М
S1=0,000192 S2=0,000102
S3=0,000126 М$^2$
I2= 0,1  I3= 0,2 А
W1= 107  W2= 192  W3= 102

ОПРЕДЕЛИТЬ I3,Ф1

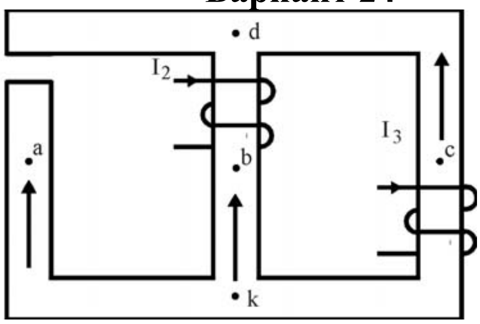
ОПРЕДЕЛИТЬ I1,Ф2

## Вариант 23



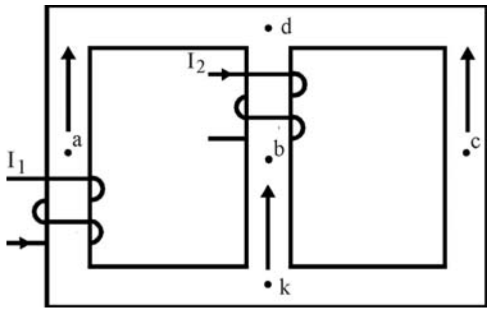

Ф2-Ф1=20E-5 Вб
L1=0,38 L2=0,11 L3=0,43 М
S1=0,000297 S2=0,00049
S3=0,000825 М$^2$
I1= 0,15 А
W1= 395 W2= 390
ОПРЕДЕЛИТЬ I2,Ф3

## Вариант 24




L1=0,298 L2=0,13 L3=0,25 М
Lвоздушного зазора=0,0001 М
S1=0,00082 S2=0,00022
S3=0,000182 М$^2$
I2= 0,1 I3= 0,75 А
W2= 997 W3= 205
ОПРЕДЕЛИТЬ Ф3,Ф2

## Вариант 25




Ф1=Ф2
L1=0,32 L2=0,1 L3=0,2 М
S1=0,0006 S2=0,0005 S3=0,0009 М$^2$
I1= 0,4 А
W1= 125 W2= 202
ОПРЕДЕЛИТЬ I2,Ф2

# 6 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Многие задачи механики, физики, химии, и других отраслей науки и техники при их математическом моделировании сводятся к необходимости **дифференцирования** и **интегрирования** функций, а соответственно, и к решению дифференциальных уравнений или их систем.

Под **дифференцированием** функции понимают операцию отыскания **производной**. Физический смысл производной функции $Y = f(X)$ в точке $X$ выражается скоростью изменения функции в этой точке. Значение производной функции $Y = f(X)$ в точке $X$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

**Аппроксимация производных** при численном дифференцировании производиться с помощью отношения конечных разностей функции $\Delta Y$ и ее аргумента $\Delta X$ т. е. $Y' \approx \Delta Y / \Delta X$ .

В зависимости от способа вычисления конечных разностей получают разные формулы для вычисления производной в одной точке: левые, правые или центральные разности. Наиболее точно аппроксимируют производные центральные разности.

Под вычислением интеграла функции $Y = f(X)$ на определенном отрезке [$a$, $b$] изменения аргумента $X$ понимают определение площади фигуры, ограниченной графиком этой функции, осью абсцисс и ординатами, проведенными в точках а и $b$.

Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл удается вычислить непосредственно с помощью неопределенного интеграла (вернее, первообразной) по формуле Ньютона-Лейбница. Однако на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по двум причинам:

1. Вид функции не допускает непосредственно интегрирования.

2. Функция задана в виде таблицы.

В этих случаях, как правило, используются методы численного интегрирования, основанные на кусочной (локальной) интерполяции подынтегральной функции. Это позволяет приближенно заменить определенный интеграл интегральной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получают разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, Симпсона и т. д.). На практике, наиболее часто, для вычисления определенных интегралов функций используется **метод трапеций**. Суть этого метода состоит в том, что интервал интегрирования [$a$, $b$] разбивают на n-равных частей, имеющих длину $h = (b - \text{a}) / n$. Площадь $I_i$ под кривой $Y = f(X)$ на одном из участков разбиения $[X_i, X_{i+1}]$считают равной площади трапеции и определяют по формуле:

$$I_i = \frac{h(f(X_i) + f(X_{i+1}))}{2}$$

Тогда общая площадь равна сумме площадей на отдельных участках разбиения, т. е.

$$\begin{aligned}
&\int_b^a f(X)dx = \sum_{i=1}^{n} I_i = (h/2)\sum_{i=0}^{n-1}(f(X_i) + f(X_{i+1})) = \\
&= h/2(f(X_0) + 2f(X_1) + \ldots + 2f((X_{n-1}) + f(X_n)) = \\
&= h((f(a) + f(b))/2 + f(X_i) + \ldots + f(X_{n-1})),
\end{aligned}$$

где $X_1 = a + h;\ X_2 = a + 2 \cdot h; \ldots, X_{n-1} = a + (n-1) \cdot h.$

Прежде чем обсуждать **методы решения** рассмотрим классификацию дифференциальных уравнений. В зависимости от числа независимых переменных дифференцируемые уравнения делятся на две различные категории:

– **обыкновенные** дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную;

– уравнения с **частными** производными, содержащие несколько независимых переменных.

Наивысший порядок, входящий в эти уравнения производной определяет порядок дифференциального уравнения.

**Решением** дифференциального уравнения называется всякая функция $Y = \varphi(X)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

**Общее решение** обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка содержит $n$ произвольных постоянных: $C_1, C_2, ..., C_n$, т. е. общее решение уравнения имеет вид $Y = \varphi(X, C_1, C_2, ..., C_n)$.

**Частное решение** дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для выделения частного решения из общего нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т. е. каков порядок уравнения.

В зависимости от **способа задания дополнительных условий** для получения частного решения дифференциального уравнения существует два различных типа задач:

1) задача Коши;

2) краевая задача.

В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках.

Если эти условия задаются в **одной точке**, то такая задача называется **задачей Коши**. Дополнительные условия в задаче Коши называются **начальными условиями**, а точка $X = X_0$, в которой они задаются – **начальной точкой**.

Если же дополнительные условия задаются **более чем в одной точке**, т. е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется **краевой**.

Сами дополнительные условия называются при этом **граничными** (или краевыми) **условиями**.

Наиболее распространенным численным методом решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений является **метод Рунге-**

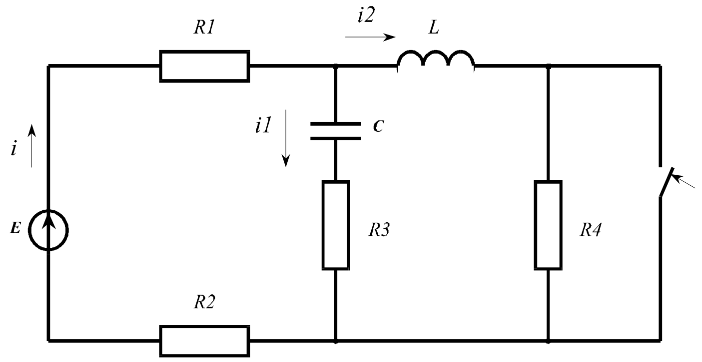
**Кутта**, т. к. он является наиболее распространенным методом решения таких систем при постоянном шаге. Его достоинством является высокая точность и меньшая склонность к возникновению неустойчивости решения. Алгоритм реализации метода Рунге-Кутта заключается в циклических вычислениях $Y_j(i+1)$ на каждом ($i$+1) шаге по следующим формулам (где $j$ – номер каждой зависимой переменной $Y_j$, $i$ – шаг интегрирования):

$$
\begin{aligned}
&K_{1j} = HF_j(X_i, Y_{ji});\\
&K_{2j} = HF_j(X_i + H/2, Y_{ji} + (1/2)K_{1j});\\
&K_{3j} = HF_j(X_i + H/2, Y_{ji} + (1/2)K_{2j});\\
&K_{4j} = HF_j(X_i + H, Y_{ji} + K_{3j});\\
&Y_j(i+1) = Y_{ji} + (1/6)(K_{1j} + 2K_{2j} + 2K_{3j} + K_{4j}).
\end{aligned}
$$

При переходе от одной формулы к другой задаются или вычисляются соответствующие значения $X$ и $Y_j$, и находятся по подпрограмме значения функций $F_j(X, Y_j)$.

## Задание 4

Дана электрическая цепь, в которой происходит коммутация (если в цепи изображен нормальноразомкнутый контакт, то в момент коммутации он замыкается, если нормальнозамкнутый – то контакт размыкается). В цепи действует постоянная ЭДС $E$. Параметры цепи, и ее электрическая схема приведены в задании (рисунок 18). Разработать ММ, блок-схему алгоритма и программу на алгоритмическом языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах для определения закона изменения во времени тока после коммутации в одной из ветвей схемы или напряжения на каком-либо элементе или между заданными точками схемы (указанными в задании).




$E = 120$ В;
$L = 1$ мГн; $C = 10{,}0$ мкФ
$R1 = 2{,}3$ Ом; $R2 = 0{,}7$ Ом;
$R3 = 1{,}0$ Ом; $R4 = 1{,}0$ Ом.
Определить: $U_c$.

Рисунок 18 – Схема коммутируемой электрической цепи

## Методические указания к выполнению задания 4

На основании законов Кирхгофа составим систему из трех уравнений для расчета мгновенных значений токов $i, i_1, i_2$ в соответствующих ветвях после коммутации цепи:

$$\begin{aligned} & i - i_1 - i_2 = 0 \\ & R_1 i + R_2 i + R_3 i_1 + (1/C)\int i_1 dt = E \\ & -R_3 i_1 - (1/C)\int i_1 dt + L(d_1/2dt) = 0. \end{aligned}$$

Далее из первого уравнения системы выразим ток $i$, подставим его во второе уравнение, которое затем сложим с третьим уравнением системы. В результате получим следующее уравнение:

$$(R_1 + R_2)(i_1 + i_2) + L\frac{di_2}{dt} = E.$$

Аналогично из первого уравнения системы выразим ток $i$, подставим его во второе, которое затем продифференцируем:

$$(R_1 + R_2 + R_3)\frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_2)\frac{di_2}{dt} + \frac{i}{C}i_1 = 0$$

Таким образом, в результате проведенных преобразований получены два уравнения без интегралов, в которых неизвестными являются токи $i_1$ и $i_2$, следовательно, для их определения необходимо решить систему уравнений, состоящую из этих двух уравнений. Для этого приведем их к каноническому виду:

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{E-(R_1+R_2)(i_1+i_2)}{L}$$
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{-((R_1+R_2)(di_2/dt)+(1/C)i_1)}{R_1+R_2+R_3}$$

Решая эту систему уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка, определим закон изменения токов $i_1$ и $i_2$ во времени после коммутации цепи. Зная закон изменения тока $i_1$, определим и закон изменения напряжения $U_c$ на конденсаторе. Тогда с учетом начальных условий закон изменения напряжения на конденсаторе определяется по формуле:

$$U_c = U_c(0) + \frac{1}{c}\int i_1 dt$$

или

$$U_c = L\frac{di_2}{dt} - i_1 R_3.$$

Для нахождения частного решения системы уравнений и определения закона изменения напряжения на конденсаторе, используя первый и второй закон коммутации и законы Кирхгофа, необходимо определить начальные значения токов $i_1(0), i_2(0)$ и напряжения $U_c(0)$.

При $t = 0$

$i_2(0_-) = i_2(0_+) = \dfrac{E}{R_1+R_2+R_4}$ – по первому закону коммутации;

$U_c(0_-) = U_c(0_+) = i_2(0_-)R_4$ – по второму закону коммутации;

$i(0)(R_1+R_2) + i_1(0)R_3 + U_c(0) = E;$

$i(0) = i_1(0) + i_2(0);$

$(i_1(0)+i_2(0))(R_1+R_2) + i_1(0)R_3 + U_c(0) = E;$

$$i_1(0) = \frac{E-U_c(0)-i_2(0)(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} = \frac{E-i_2(0)R_4 - i_2(0)(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} =$$
$$= \frac{E-i_2(0)(R_1+R_2+R_4)}{R_1+R_2+R_3};$$

Тогда $$i_2(0) = \frac{120}{2{,}3 + 0{,}7 + 1} = 30A;$$

$$U_c(0) = 30 \cdot 1 = 30B;$$

$$i_1(0) = \frac{120 - 30(2{,}3 + 0{,}7 + 1)}{2{,}3 + 0{,}7 + 1} = \frac{0}{4} = 0A;$$

Блок-схема алгоритма решения рассматриваемой задачи представлена на рисунке 19.

В первом блоке блок-схемы алгоритма производиться ввод исходных данных: количества неизвестных в полученной системе дифференциальных уравнений, значений напряжения источников ЭДС, сопротивления резисторов, индуктивности катушки, ёмкости конденсатора, шага интегрирования, начального и конечного значений параметра интегрирования (в данном случае времени), начального значения напряжения на конденсаторе. Во 2–4 блоках задаются начальные значения искомых параметров (токов). В 5-ом блоке производится печать заглавия («шапки») таблицы. В 6-ом блоке производится вычисление функций $F_i = \frac{di_1}{dt}$ по подпрограмме. В 7-ом блоке производится запоминание тока $i_1$ из предыдущего цикла вычислений, чтобы в дальнейшем его использовать при вычислении напряжения на конденсаторе методом трапеций. Начиная с 8-го и заканчивая 27-ым проводится решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта, при этом в блоках 8–12 находятся коэффициенты $K_{ij}$ и подготавливаются новые значения $X$ и $Y_j$ для вычисления новых функций $F_i$ и соответственно $K_{2j}$ с дальнейшим накоплением их суммы (блоки 13–17). Аналогичные операции проводятся в блоках 18–27 для вычисления коэффициентов $K_{3j}$ и $K_{4j}$ и определения искомых токов $i_1$ и $i_2$. В блоке 28 проводится нахождение напряжения на конденсаторе, в 29 блоке – запоминание этого напряжения с целью дальнейшего накопления его интегральной суммы. В блоке 30 проводится вывод результатов расчета, а в 31 – проверка окончания процесса расчета. На основании разработанного алгоритма на Pascal для решения данной задачи на ЭВМ (программа 11) и на Basic (программа 12). Последовательность ее операторов соответствует разработанной блок-схеме алгоритма.

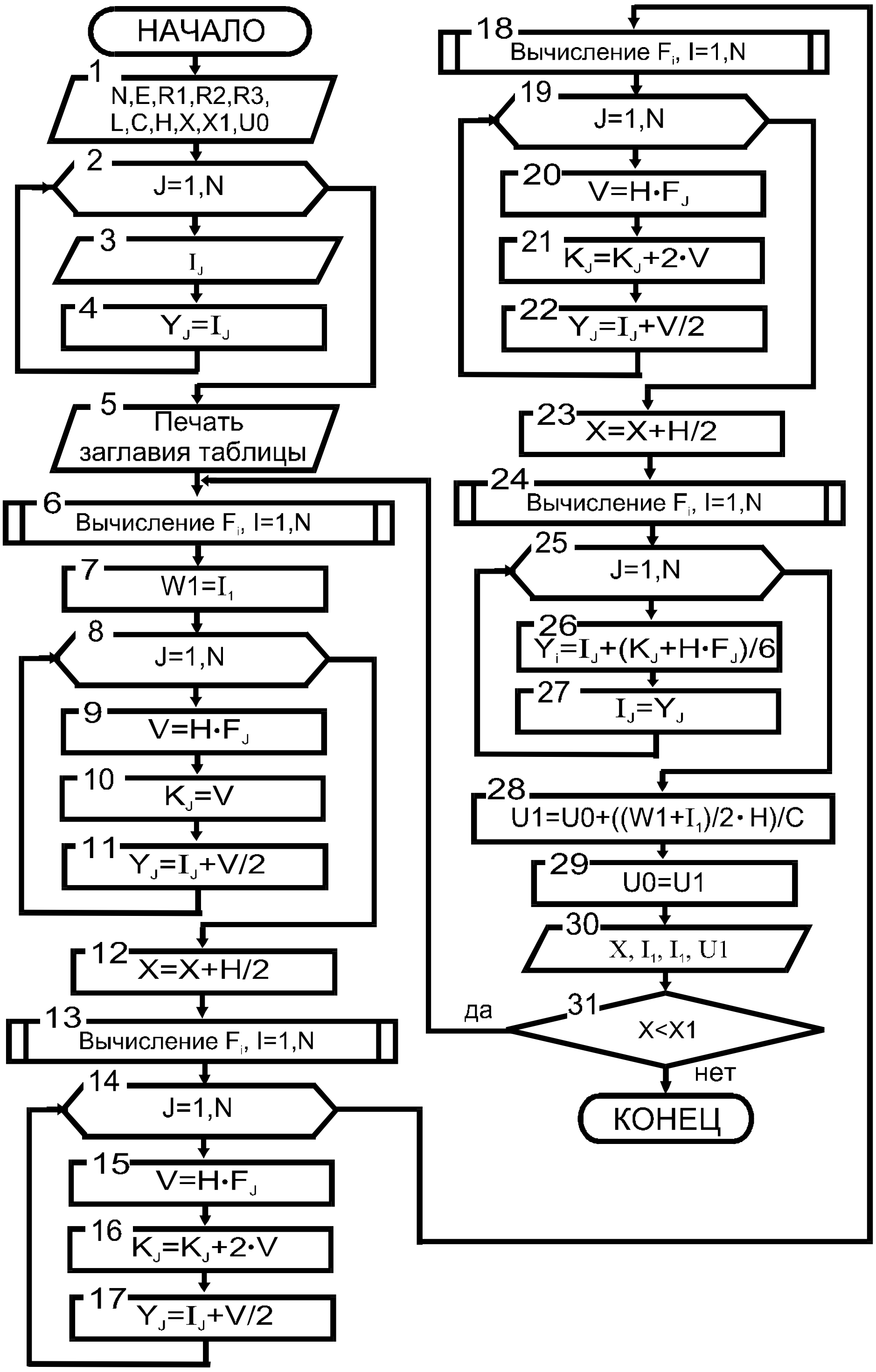



Рисунок 19 – Блок-схема алгоритма определения закона изменения напряжения во времени на конденсаторе после коммутации электрической цепи

Пример решения задания 4 на языке **Pascal**.

Программа 13

```
const n=2;
var
 Y,K,F,W : array [1..n] of real;
 e,r1,r2,r3,L,c,h,x,x1,u0,u1,w1,v : real;
 j : Integer;
Procedure RF;
Begin
 F[2]:=(e-(r1+r2)*(y[1]+y[2]))/L;
 F[1]:=(-(r1+r2)*F[2]-y[1]/c)/(r1+r2+r3);
end;
Begin
 Writeln('Введите E,R1,R2,R3,L,C');
 Readln(e,r1,r2,r3,L,c);
 Writeln('Задайте шаг');
 Readln(h);
 Writeln('Задайте Тн');
 Readln(x);
 Writeln('Задайте Tk');
 Readln(x1);
 For j:=1 to n do
 Begin
  Write('Задайте начальный ток I[',j,']=');
  Readln(w[j]);
  y[j]:=w[j];
 end;
 Write('Задайте начальное напряжение на конденсаторе
Uc=');
 Readln (U0);
 Writeln('-----------------------------------------');
 Writeln('| x | i1 | i2 | Uc |');
 Writeln('-----------------------------------------');
 Repeat
 RF;
 w1:=w[1];
 For j:=1 to n do
  Begin
  v:=h*f[j];
  k[j]:=v;
  y[j]:=w[j]+v/2;
  end;
 x:=x+h/2;
 RF;
```

```
 For j:=1 to n do
  Begin
  v:=h*f[j];
  k[j]:=k[j]+2*v;
  y[j]:=w[j]+v/2;
  end;
 RF;
 For j:=1 to n do
  Begin
  v:=h*f[j];
  k[j]:=k[j]+2*v;
  y[j]:=w[j]+v;
  end;
 x:=x+h/2;
 RF;
 For j:=1 to n do
  Begin
  y[j]:=w[j]+(k[j]+h*f[j])/6;
  w[j]:=y[j];
  end;
 u1:=u0+((w1+y[1])/2*h)/c;
 u0:=u1;
 Writeln(x:6:5,y[1]:12:3,y[2]:12:3,u1:12:2);
 until (x>x1);
end.
```

Пример решения задания 4 на языке **Basic**.

Программа 14

```
10 PRINT "ВВЕДИТЕ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ"
20 INPUT N
30 DIM Y(N),K(N),F(N),W(N)
40 PRINT "ЗАДАЙТЕ E,R1,R2,R3,R4,L,C"
50 INPUT E,R1,R2,R3,R4,L,C
60 PRINT "ЗАДАЙТЕ ШАГ"
70 INPUT H
80 PRINT "ЗАДАЙТЕ Тн"
90 INPUT X
100 PRINT "ЗАДАЙТЕ Тк"
110 INPUT X1
120 FOR J=1 TO N
130 PRINT "ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНЫЙ ТОК I("J")"
140 INPUT W(J)
150 Y(J)=W(J)
160 NEXT J
```

```
170 PRINT "ЗАДАЙТЕ НАЧАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ НА КОНДЕНСАТОРЕ Uc"
180 INPUT U0
190 PRINT "---------------------------------------------"
200 PRINT " X |  i1  | i2 | Uc "
210 PRINT "---------------------------------------------"
220 GOSUB 530
230 W1=W(1)
240 FOR J=1 TO N
250 V=H*F(J)
260 K(J)=V
270 Y(J)=W(J)+V/2
280 NEXT J
290 X=X+H/2
300 GOSUB 530
310 FOR J=1 TO N
320 V=H*F(J)
330 K(J)=K(J)+2*V
340 Y(J)=W(J)+V/2
350 NEXT J
360 GOSUB 530
370 FOR J=1 TO N
380 V=H*F(J)
390 K(J)=K(J)+2*V
400 Y(J)=W(J)+V
410 NEXT J
420 X=X+H/2
430 GOSUB 530
440 FOR J=1 TO N
450 Y(J)=W(J)+(K(J)+H*F(J))/6
460 W(J)=Y(J)
470 NEXT J
480 U1=U0+((W1+Y(1))/2*H)/C
490 U0=U1
500 PRINT USING "###.###### ";X,Y(1),Y(2),U1
510 IF X<X1 THEN 220
520 STOP
530 F(2)=(E-(R1+R2)*(Y(1)+Y(2)))/L
540 F(1)=(-(R1+R2)*F(2)-Y(1)/C)/(R1+R2+R3)
550 RETURN
560 END
```

Пример выполнения задания 4 в пакете **Matlab.**

Для решения задачи создадим *m*-файл (программа 15). При сохранении этому файлу по умолчанию присвоится имя, совпадающее с именем функции **lab4**.

Программа 15

```
function lab4
E=input('E=');
T(1)=input('To=');
T(2)=input('Tk =');
R(1)=input('R1=');
R(2)=input('R2=');
R(3)=input('R3=');
R(4)=input('R4=');
C=input('C=');
L=input('L=');
I=E/(R(1)+R(2)+R(4)); U0=[0 I];
uco=I*R(4); Uc=[uco]; OC=1/C;
[t,U]=ode45(@vdpr,T,U0,[],E,R,L,C);
n=length(t);
for i=1:n-1
 uco=uco+(U(i,1)+U(i+1,1))*(t(i+1)-t(i))*0.5*OC;
 Uc=[Uc uco];
end
figure(1)
plot(t,Uc,'k'), grid on
title('Uc=f(t)');
figure(2)
plot(t,U(:,1),'r'), grid on
title('I1=f(t)');
figure(3)
plot(t,U(:,2),'b'), grid on
title('I2=f(t)');
function dy1dt=vdpr(t,y,E,R,L,C)
R12=R(1)+R(2);
dy2dt=(E-R12*(y(1)+y(2)))/L;
dy1dt=[-(R12*dy2dt+y(1)/C)/(R12+R(3));dy2dt];
```

В приведенной программе: $t$ – время; $E$ – эдс источника; $R$ – массив сопротивлений, $L$ – индуктивность, $C$ – емкость, $I$ – установившийся ток $i_2$ (до коммутации); **U0** – массив начальных значений токов; *uco* – начальное напряжение на конденсаторе; *Uc* – массив значений напряжений на конденсаторе; $T$ –

массив, содержащий начальное и конечное время переходного процесса; *U* – массив значений токов; *ode*45 – функция, реализующая метод Рунге-Кутта.

Результаты расчета отображаются в виде графиков (рисунки 20–22).

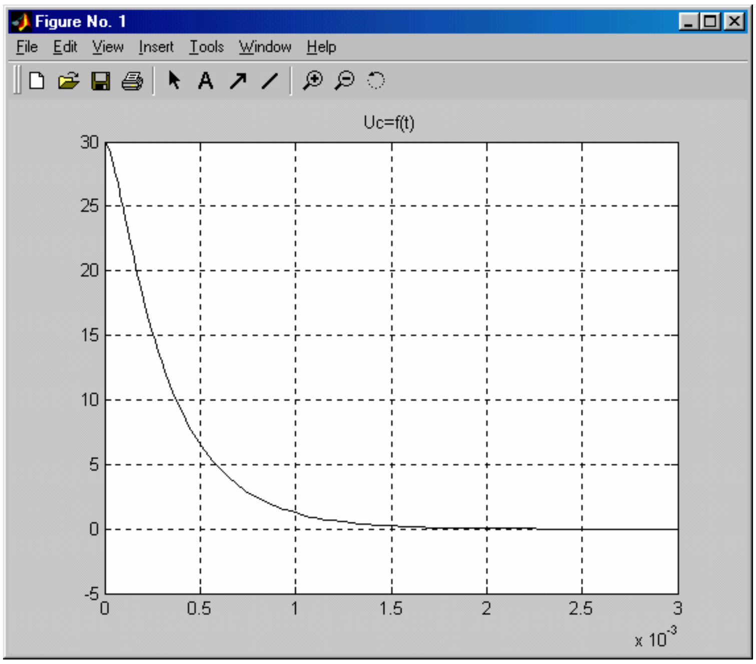



Рисунок 20 – График изменения напряжения на конденсаторе при коммутации электрической цепи

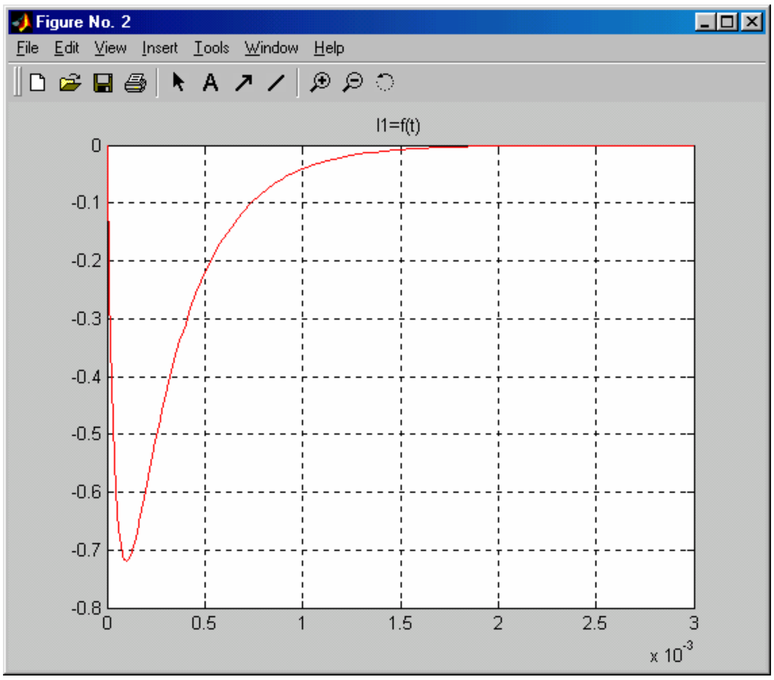



Рисунок 21 – График изменения тока $i_1$ при коммутации электрической цепи

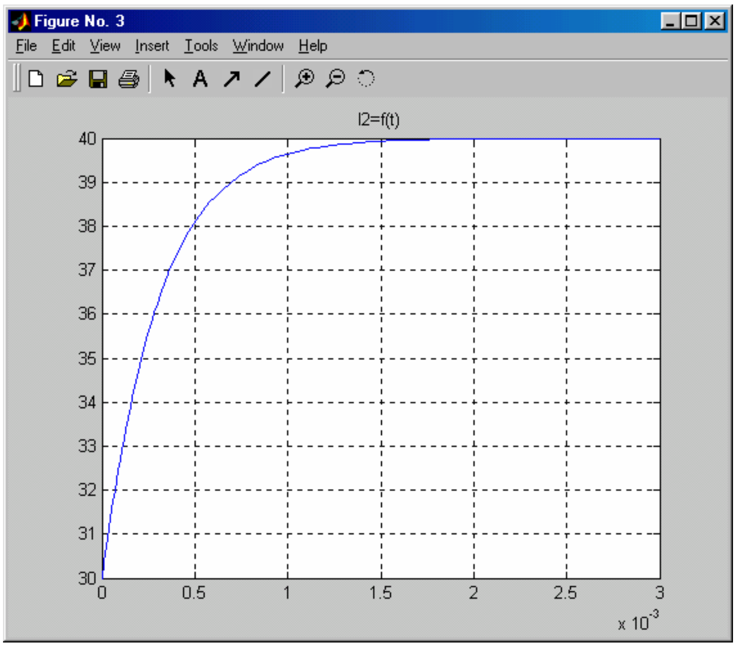



Рисунок 22 – График изменения тока $i_2$ при коммутации электрической цепи

Работу схемы можно моделировать и в пакете Simulink. После загрузки программы Matlab появится командное окно, в котором можно вводить команды и сразу видеть результат их выполнения (фрагмент окна на рисунке 23).

До начала выполнения задания сделать активной (текущей) свою папку, например, Ivanov**.** Для этого в главном окне Matlab рядом со строкой **Current Directory (**Текущая Директория**)** нажать кнопку с многоточием (см. рисунок 23), расположенную справа от раскрывающегося списка. Откроется окно **Обзор папок** (Browse for Folder**),** с помощью которого следует найти диск **X** и свою папку **Ivanov.** Выделить ее и нажать **OK.** В текстовом поле **Current Directory** появится имя вашей папки.

Вызвать библиотеку блоков, нажав кнопку Simulink (см. рисунок 23. Окно библиотеки блоков (**Simulink Library Browser**) имеет вид, представленный на рисунке 24.

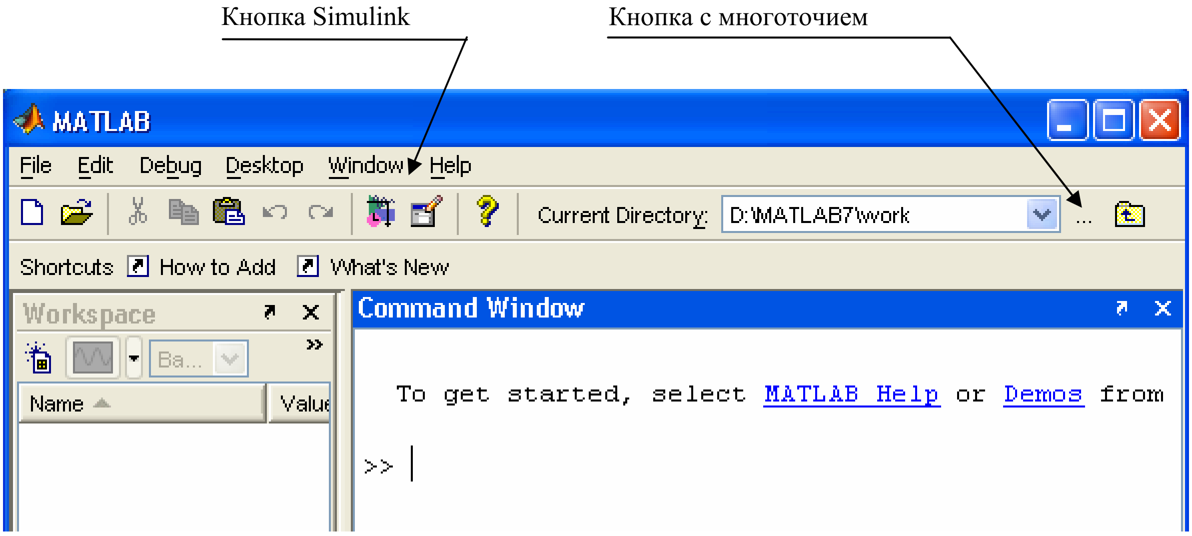



Рисунок 23 – Фрагмент главного окна Matlab

В библиотеке блоков развернуть требуемый раздел (по умолчанию развернут раздел Simulink). В *окне библиотеки блоков* нажать кнопку создания нового файла, откроется окно графического редактора. В это окно перетаскиваются мышкой (при нажатой левой кнопке) все требуемые элементы схемы (блоки) из подразделов библиотеки блоков.

Установить параметры блоков. Для этого дважды щелкнуть мышкой на блоке, откроется окно параметров блока. После ввода параметров нажать кнопки Apply, Ok. Размер блока можно менять, выделив его и «тягая» за углы. При необходимости свойства блока, например, угол поворота, устанавливаются с помощью правой кнопки мыши.

Соединить блоки линиями связи. Для этого установить мышку на вход или выход блока (появится крестик) и, не отпуская кнопки мыши, подвести к выходу или входу другого блока (появится двойной крестик), отпустить кнопку. Расположение линий можно менять «тягая» их мышкой. Если необходимо соединить блок с линией связи, то начинать следует от блока.

Названия блоков можно изменять, а в любом месте схемы можно вставить комментарий, щелкнув дважды мышкой.

Когда схема готова, следует установить параметры моделирования. Это осуществляется выбором пункта **Simulation** из меню окна графического редактора и затем **Configuration Parameters …**

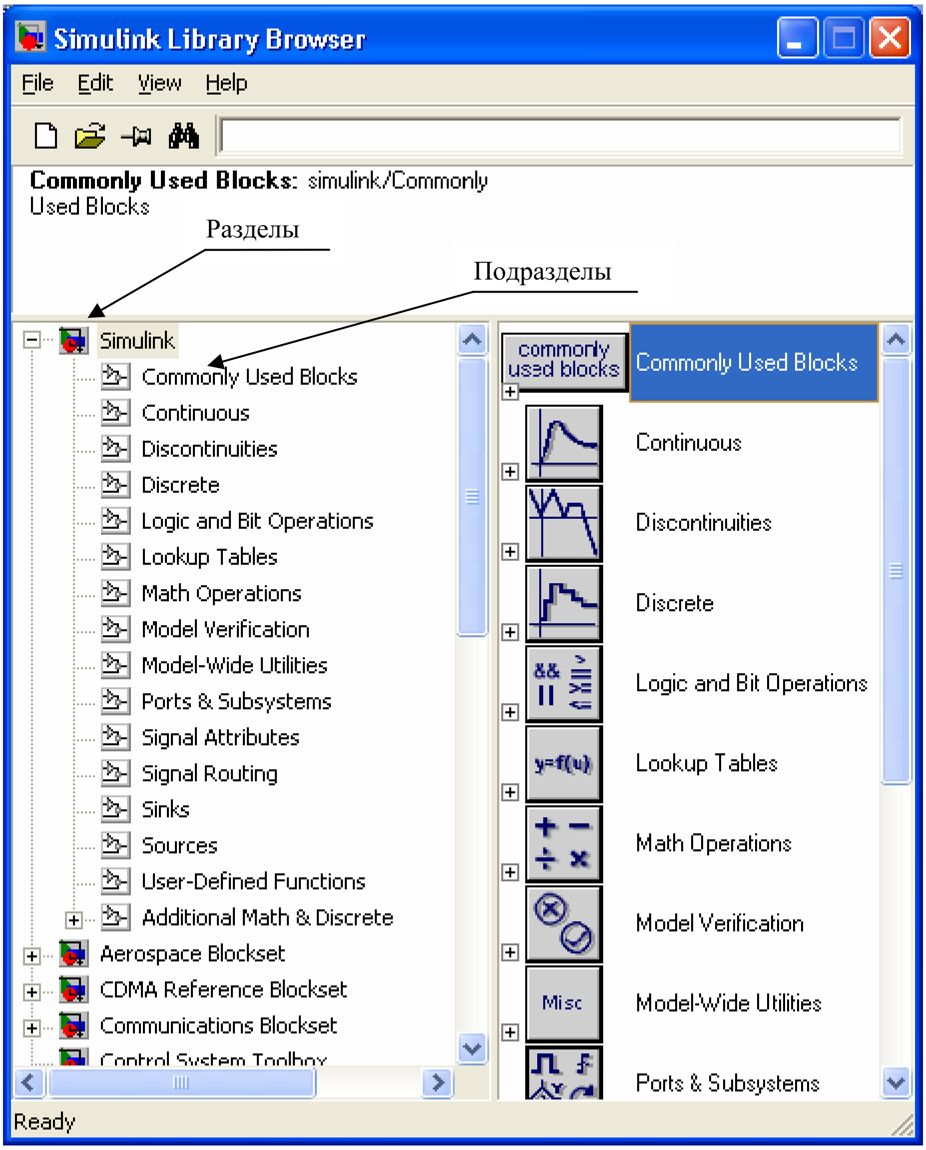



Рисунок 24 – Окно библиотеки блоков

SimPowerSystem – модель

В библиотеке блоков развернуть пункт SimPowerSystem, в окне библиотеки нажать кнопку создания нового файла – откроется окно графического редактора. Затем из библиотеки блоков переместим в окно графического редактора необходимые элементы для построения нашей схемы (рисунок 25):

- параллельную *RLC*-цепь **Parallel RLC Branch** (подраздел **Elements**);
- две последовательных *RLC*-цепи **Series RLC Branch** (подраздел **Elements**);
- источник напряжения **DC Voltage Source** (подраздел **Electrical Sources**);
- переключатель **Ideal Switch** – идеальный ключ (подраздел **Power Electronics**), рекомендуется для схем постоянного тока;

- таймер **Timer** (подраздел **Control Blocks**) для задания момента срабатывания ключа;
- вольтметр **Voltage Measurement** (подраздел **Measurements**) для измерения напряжения на конденсаторе;
- два соединителя **T connector** (подраздел **Connectors**);
  - в библиотеке блоков развернуть пункт **Simulink** и перетащить оттуда блок **Scope** (осциллограф) для визуализации переходного процесса.

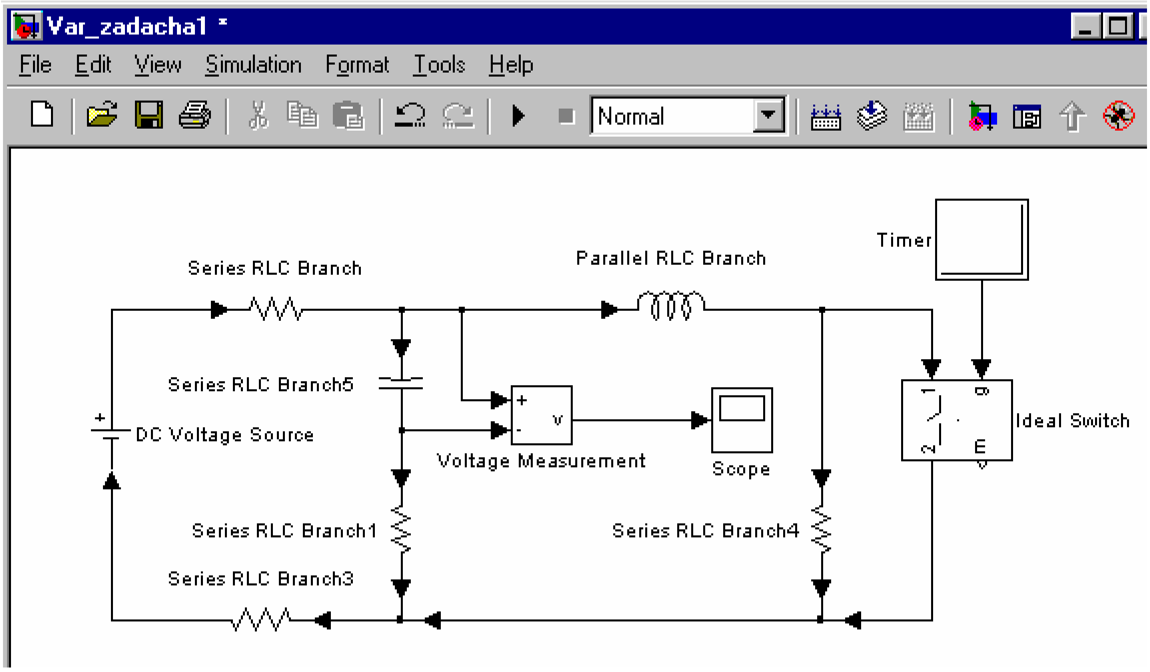



Рисунок 25 – Модель заданной RLC-цепи

Все отдельные $R$, $L$ и $C$ элементы моделируются последовательным или параллельным блоком *RLC* с соответствующим выбором значений элементов. Например, сопротивление $r$ можно представить последовательной цепью со значением параметров: $R = r$; $L = 0$; $C = \text{Inf}$. В Matlab Inf обозначает бесконечность. Какой элемент, какой цепью представлять решается в каждом конкретном случае по-своему, в зависимости от удобства и физического смысла. Обычно в цепях с источниками постоянного тока индуктивность удобней представлять параллельной RLC-цепью при $R = \text{Inf}$ и $C = 0$, а емкость последовательной – при $R = 0$ и $L = 0$.

При формировании схемы элементы можно «размножать» путем их перетаскивания из библиотеки блоков или путем копирования. Используя предложенные рекомендации, сформируем из параллельной схемы индуктивность, а из последовательной емкость нашей схемы, установив $L = 0{,}001$ и $C = 0{,}00001$. Из оставшейся последовательной цепи сформируем сопротивление $R1$, положив $L = 0$, $C = \text{Inf}$, $R = 23$. Сделаем три копии сопротивления и установим в них значения 7, 1, 1, для $R2$, $R3$, $R4$, соответственно.

Модель ключа требует задания внутреннего сопротивления $R\text{on}$, паразитных шунтирующих сопротивления $R\text{s}$ и емкости $C\text{s}$, а также начального положения ключа: $g = 0$ – разомкнут, $g = 1$ – замкнут. Параметры имеют следующие ограничения: нельзя, чтобы $R\text{on} = 0$, $R\text{s} = 0$, одновременно $R\text{s} = \text{Inf}$ и $C\text{s} = \text{Inf}$. Выберем $R\text{on} = 0{,}0000001$, $g = 0$, $R\text{s} = \text{Inf}$, $C\text{s} = 0$.

**ВНИМАНИЕ!!!** При последовательном включении ключа и индуктивности, $C\text{s}$ не может быть нулевым. Это связано с тем, что модель ключа использует схему постоянного тока.

Таймер (**Timer**) используется для управления моментами срабатывания ключа, для чего задаются массив значений моментов срабатывания (строка **Time** в блоке) и массив значений управляющего сигнала $g$ (строка **Amplitude** в блоке), который подается на соответствующий вход ключа. Установим **Time** =[0], **Amplitude** =[1].

Вольтметр **Voltage Measurement** необходим для измерения напряжения на конденсаторе и подачи его на осциллограф (**Scope**), т. к. осциллограф принадлежит другому пакету моделирования и его нельзя непосредственно включать в электрическую цепь.

Соединим все блоки линиями связи («проводами»). Здесь понадобятся блоки «**T connector**», с помощью которых собираются узлы, где несколько входящих токов. В нашем случае это подключение сопротивлений $R_3$, $R_4$ и ключа к сопротивлению $R_2$ (для современной версии Matlab это ограничение снято). Отметим, что вольтметр без проблем присоединяется только к линиям связи. Для удобства поменяем названия элементов на обозначения в задании (рисунок 26).

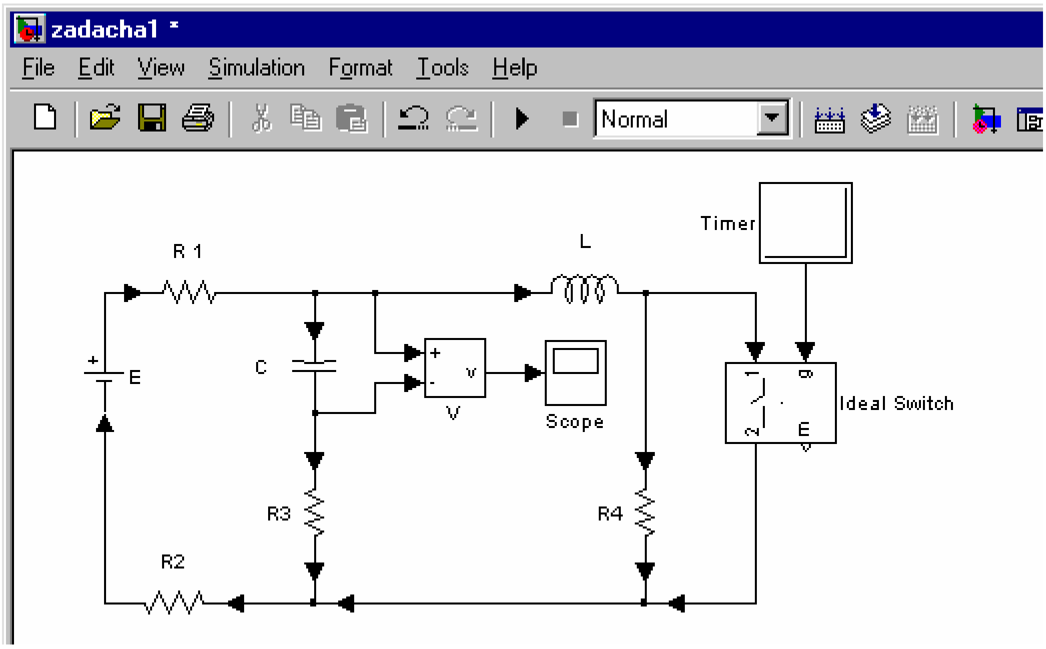



Рисунок 26 – Окончательный вид модели

В подразделе **«Simulation parameters…»** раздела **«Simulation»** (рисунок 27) главного меню устанавливаем время моделирования 0,003 с и метод решения ode15s.

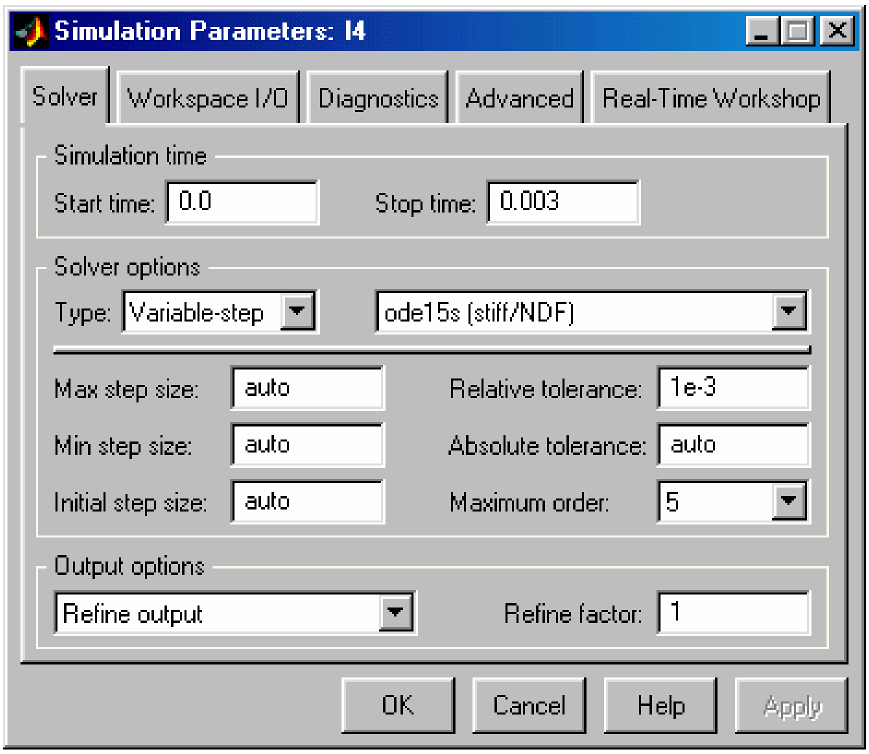



Рисунок 27 – Настройка параметров моделирования

Пример выполнения задания 4 в пакете **Excel.**

Для решения этой задачи на рабочем листе EXCELвоспользуемся таблицей 15.

Таблица 15 – Исходные данные

| | A | | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E, В | R1,Ом | R2,Ом | R3,Ом | R4,Ом | L, Гн | C, Ф | H, с | | | | | | | |
| 2 | 120 | 2,3 | 0,7 | 1,0 | 1,0 | 0,001 | 0,00001 | 0,0001 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | t | I2i | I2i+1 | K1(I2) | K2(I2) | K3(I2) | K4(I2) | dI2/dt | I1i | I1i+1 | K1(I1) | K2(I1) | K3(I1) | K4(I1) | uc |
| 6 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | |

B6) `=A$2 /(B$2+C$2+E$2);`
C6) `=B6+(D6+2*E6+2*F6+G6)/6;`
D6) `=H$2*(A$2-(B$2+C$2)*(I6+B6))/F$2;`
E6) `=H$2*(A$2-(B$2+C$2)*(I6+K6/2+B6+D6/2))/F$2;`
F6) `=H$2*(A$2-(B$2+C$2)*(I6+L6/2+B6+E6/2))/F$2;`
G6) `=H$2*(A$2-(B$2+C$2)*(I6+M6+B6+F6))/F$2;`
H6) `=(A$2-(B$2+C$2)*(I6+B6))/F$2;`
I6) `=(A$2-B6*(B$2+C$2+E$2))/(B$2+C$2+D$2);`
J6) `=I6+(K6+2*L6+2*M6+N6)/6;`
K6) `=-H$2*((B$2+C$2)*H6+(1/G$2)*I6)/(B$2+C$2+D$2);`
L6) `=-H$2*((B$2+C$2)*H6+(1/G$2)*(I6+K6/2))/(B$2+C$2+D$2);`
M6) `=-H$2*((B$2+C$2)*H6+(1/G$2)*(I6+L6/2))/(B$2+C$2+D$2);`
N6) `=-H$2*((B$2+C$2)*H6+(1/G$2)*(I6+M6))/(B$2+C$2+D$2);`
O6) `=B$6*E$2;`
A7) `=A6+H$2;`
B7) `=C6.`

В ячейки C7–H7 копируются, соответственно, формулы с ячеек C6–H6.

I7) `=J6.`

В ячейке J7–N7 копируются, соответственно, формулы с ячеек J6–N6.

Напряжение на конденсаторе в последующий момент времени будем определять по формуле:

$$U_C = L\frac{di_2}{dt} - i_1 R_3,$$

соответственно, формула для ячейке О7 будет следующей:

O7) `=F$2*H7-I6*D$2.`

Далее строка 7 копируется начиная с восьмой и т. д. до тех пор пока переходной процесс не установится (каждая скопированная строка соответствует одному шагу по времени).

## Вопросы для самопроверки

1 Поясните физический и геометрический смысл производной.

2 Дайте пояснение аппроксимации производной.

3 Поясните сущность численного интегрирования, а также их методов – прямоугольников, трапеций, Симпсона.

4 Дайте классификацию дифференциальных уравнений и их систем.

6 Дайте понятие общему и частному решениям дифференциальных уравнений.

6 Способы задания дополнительных условий при определении частных решений дифференциальных уравнений.

7 Сущность метода Эйлера для решения обыкновенного дифференциального уравнения на задачу Коши.

8 Сущность метода Рунге-Кутта для решения обыкновенного дифференциального уравнения на задачу Коши.

9 За счет чего проводится повышение точности решения при использовании метода Рунге-Кутта в сравнении с методом Эйлера?

10 Поясните геометрический смысл коэффициентов К1, К2, К3, и К4 в методе Рунге-Кутта.

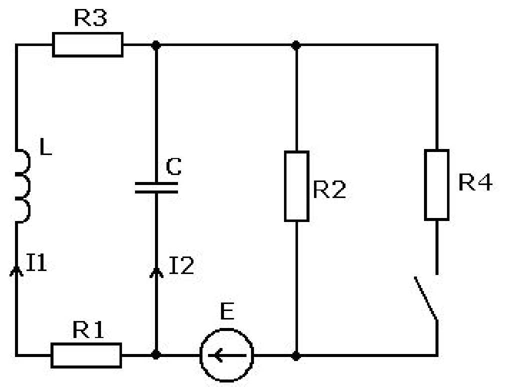
11 Какой из методов наиболее часто используется для решения обыкновенного дифференциального уравнения на краевую задачу? Поясните сущность этого метода.

12 От чего зависит точность решения дифференциальных уравнений при использовании численных методов?

## Индивидуальные задания

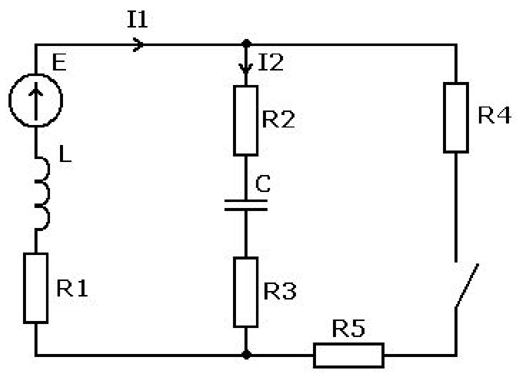
По заданному варианту разработать ММ, блок-схему алгоритма и программу на алгоритмическом языке **Pascal** или **Basic**, в системе **Matlab** и в электронных таблицах для определения закона изменения во времени тока после коммутации в одной из ветвей схемы или напряжения на каком-либо элементе (указанными в задании).

### Вариант 1



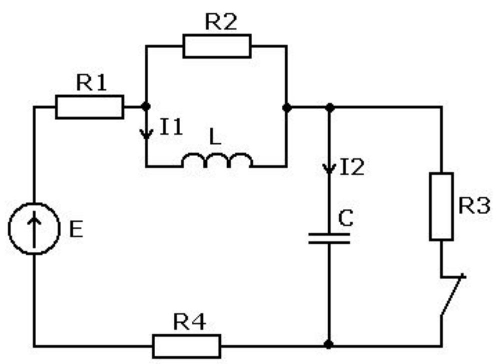

```
E= 300 В L= 5 мГн C= 4,0 мкФ
R1= 2,21 Ом R2= 20,00 Ом
R3= 17,79 Ом R4= 20,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I1
```

### Вариант 2



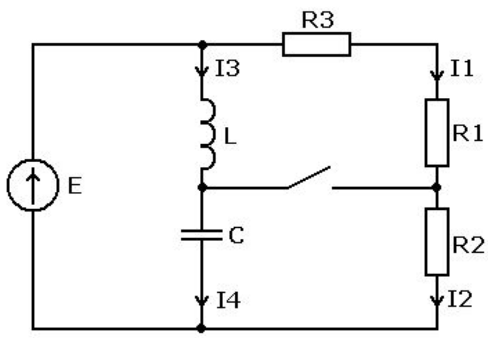

```
E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 20,00 Ом R2= 11,80 Ом
R3= 8,20 Ом R4= 2,00 Ом
R5= 3,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL
```

### Вариант 3



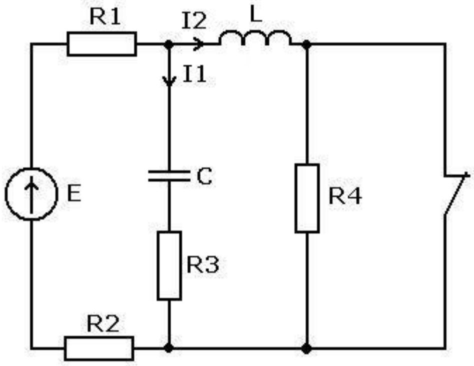

```
E= 150 В L= 4 мГн C= 5,0 мкФ
R1= 7,21 Ом R2= 10,00 Ом
R3= 5,00 Ом R4= 2,79 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I1
```

### Вариант 4



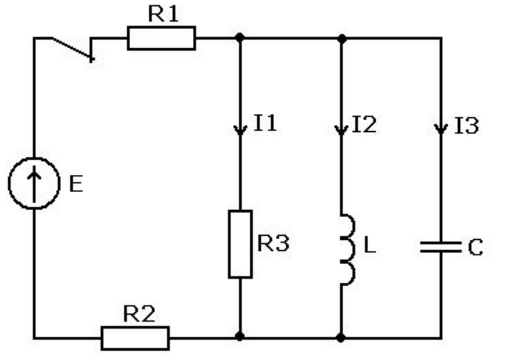

```
E= 30 В L= 1 мГн C= 2,5 мкФ
R1= 9,80 Ом R2= 10,00 Ом
R3= 10,20 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I4
```

## Вариант 5



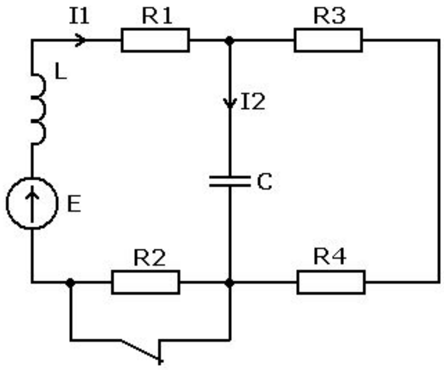

```
E= 200 В L= 10 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 14,00 Ом R2= 86,00 Ом
R3= 50,00 Ом R4= 100,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ Uc
```

## Вариант 6



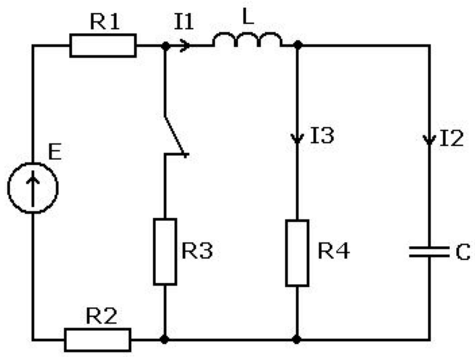

```
E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 16,40 Ом R2= 3,60 Ом
R3= 4,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I3
```

## Вариант 7



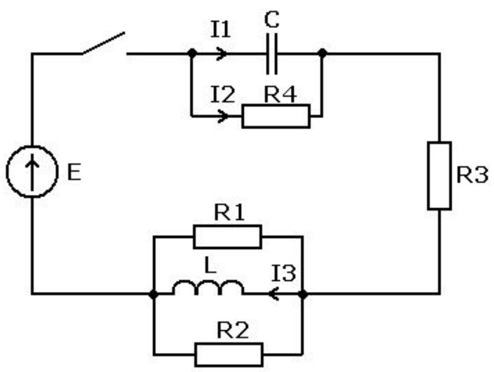

```
E= 50 В L= 2 мГн C=1670,0 мкФ
R1= 1,00 Ом R2= 2,00 Ом
R3= 2,00 Ом R4= 4,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL
```

## Вариант 8



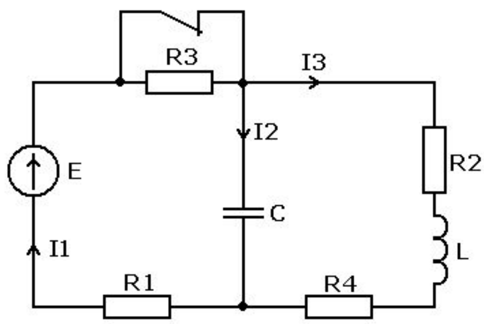

```
E= 120 В L= 10 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 10,61 Ом R2= 89,39 Ом
R3=1000,00 Ом R4=1000,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I3
```

## Вариант 9



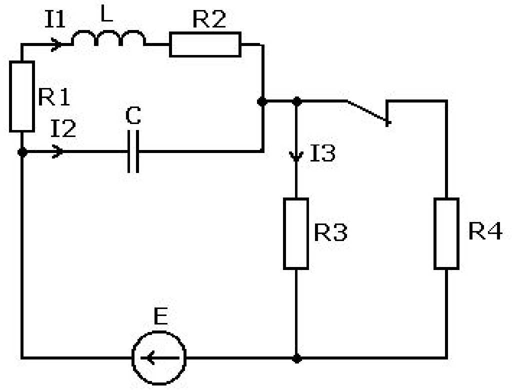

```
E= 120 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 9,80 Ом R2= 6,20 Ом
R3= 8,00 Ом R4= 4,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I2
```

## Вариант 10



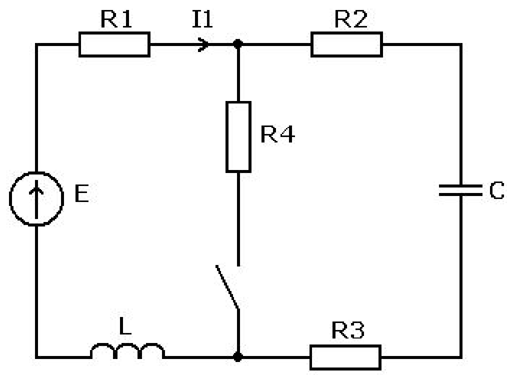

```
E= 200 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 10,00 Ом R2= 5,29 Ом
R3= 50,00 Ом R4= 34,71 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I3
```

## Вариант 11



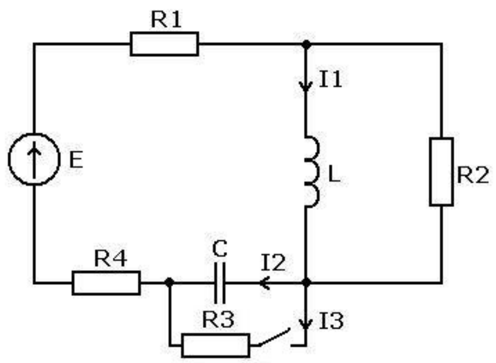

E= 50 В L= 1 мГн C= 100,0 мкФ
R1= 8,00 Ом R2= 2,00 Ом
R3= 10,00 Ом R4= 10,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I3

## Вариант 12



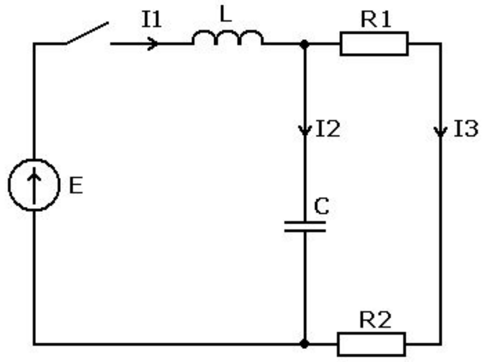

E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 20,00 Ом R2= 4,30 Ом
R3= 15,70 Ом R4= 2,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ Ur3

## Вариант 13



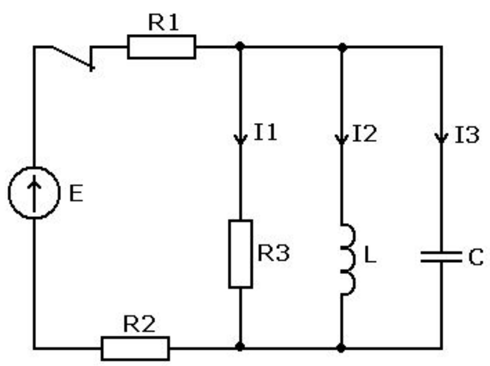

E= 150 В L= 2 мГн C= 5,0 мкФ
R1= 5,79 Ом R2= 10,00 Ом
R3= 5,00 Ом R4= 4,21 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL

## Вариант 14



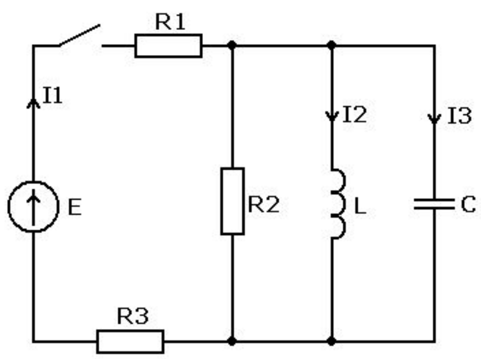

E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 1,40 Ом R2= 2,60 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL

## Вариант 15



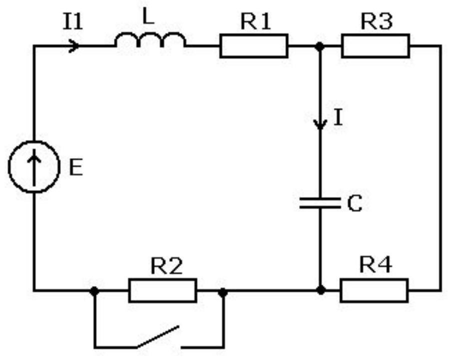

E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 18,30 Ом R2= 1,70 Ом
R3= 4,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I2

## Вариант 16



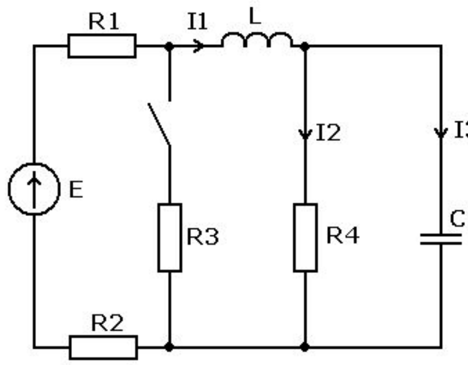

E= 100 В L= 5 мГн C= 50,0 мкФ
R1= 7,61 Ом R2= 8,00 Ом
R3= 0,39 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I2

## Вариант 17



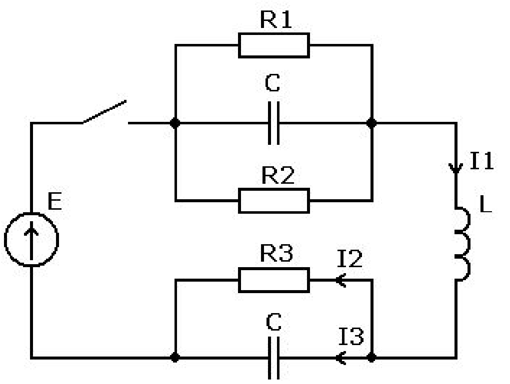

E= 50 В L= 1 мГн C=1500,0 мкФ
R1= 2,00 Ом R2= 13,00 Ом
R3= 2,29 Ом R4= 2,71 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ Uc

## Вариант 18



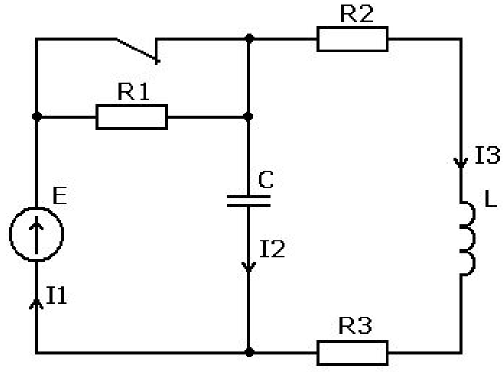

E= 120 В L= 10 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 15,30 Ом R2= 84,70 Ом
R3=1000,00 Ом R4=1000,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL

## Вариант 19



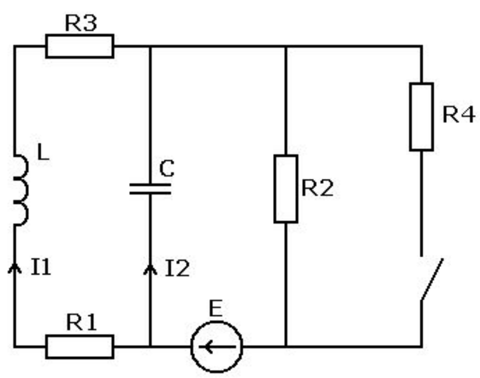

E= 200 В L= 1 мГн C= 20,0 мкФ
R1= 3,31 Ом R2= 4,69 Ом
R3= 2,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL

## Вариант 20



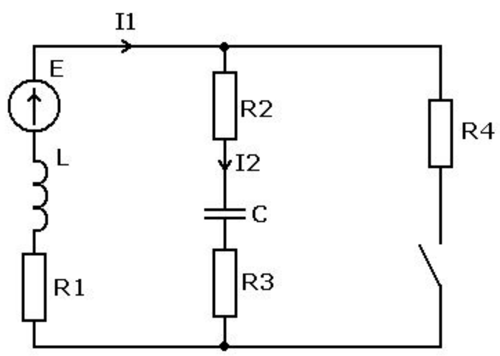

E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 50,00 Ом R2= 32,61 Ом
R3= 17,39 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I1

## Вариант 21



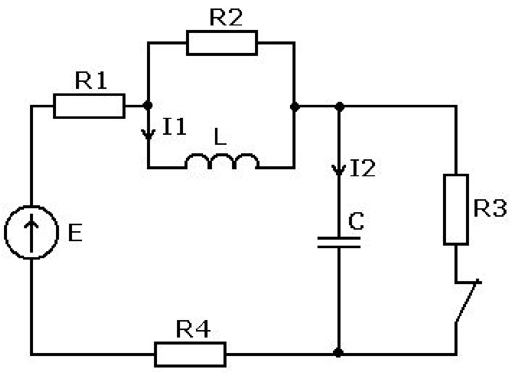

E= 300 В L= 5 мГн C= 4,0 мкФ
R1= 3,91 Ом R2= 20,00 Ом
R3= 16,09 Ом R4= 20,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL

## Вариант 22



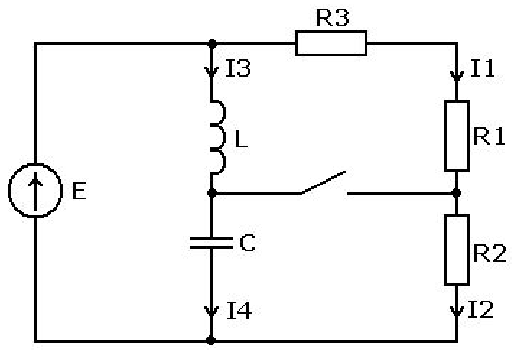

E= 100 В L= 1 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 20,00 Ом R2= 13,40 Ом
R3= 6,60 Ом R4= 2,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ Uc

## Вариант 23



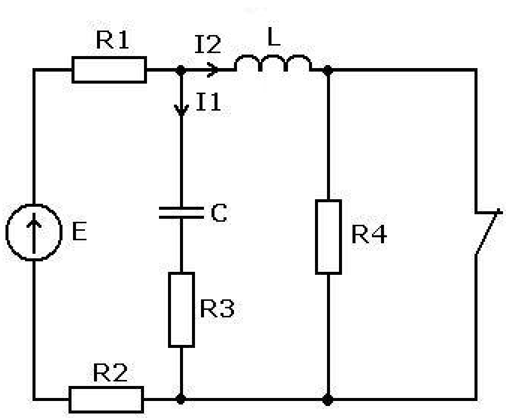

E= 150 В L= 4 мГн C= 5,0 мкФ
R1= 2,01 Ом R2= 10,00 Ом
R3= 5,00 Ом R4= 7,99 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I2

## Вариант 24




E= 30 В L= 1 мГн C= 2,5 мкФ
R1= 11,40 Ом R2= 10,00 Ом
R3= 8,60 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ I2

## Вариант 25




E= 200 В L= 10 мГн C= 10,0 мкФ
R1= 34,00 Ом R2= 66,00 Ом
R3= 50,00 Ом R4= 100,00 Ом
ОПРЕДЕЛИТЬ UL

## ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Москва : Наука, 1978. –512 с.

2 Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – Москва : Физматгиз, 1963. – 400 с.

3 Турчак, Л.И. Основы численных методов : уч. пособие. – 2-е изд. перераб. и доп. / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

4 Мэтьюз, Д. Численные методы. Использование MATLAB / Д. Мэтьюз, К. Финк. – Москва : Издательский дом ВИЛЬЯМС. – 2001.

5 Ануфриев, И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. / И.Е. Ануфриев – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2002.

6 Электронный ресурс : http://www.matlab.ru

7 Электронный ресурс : http://www.exponenta.ru

8 Форсайт, Д. Машинные методы математических вычислений / Д. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – Москва : Мир, 1980. – 280 с.

9 Введение в MATLAB. Методические указания к лабораторно-практическим занятиям по дисциплине «Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ». – Минск : БГАТУ, 2002.

10 Аппроксимация. Методические указания к лабораторно-практическим занятиям по дисциплине «Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ». – Минск : БГАТУ, 2002.

11 Моделирование динамических систем. Методические указания к лабораторно-практическим занятиям по дисциплине «Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ». – Минск : БГАТУ, 2002.

12 Оптимизация. Методические указания к лабораторно-практическим занятиям по дисциплине «Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ». – Минск : БГАТУ, 2003.

13 Математическая компьютерная система MATLAB. Методические указания к лабораторно-практическим занятиям студентов агромеханического и

агроэнергетического факультетов для начального знакомства с системой «MATLAB» по курсу «Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ». – Минск : БГАТУ, 2003.

14 Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – Москва : ABF, 1996.

15 Компьютерная математика. Теория и практика / В.П. Дьяконов. – Москва : Нолидж, 2001. – 1295 с.

16 Excel. Практическое руководство / Т. Куправа. – Москва : Диалог-МИФИ, 2004.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Гуров, Л.И. Прикладные программы / Л.И. Гуров, С.С. Сахаров. – Москва : Статистика, 1980.

2 Еникеев, Ш.Г. Математическое моделирование биотехнологических процессов / Ш.Г. Еникеев [и др.]. – Казань, 1981.

3 Кафаров, В.В. Принципы математического моделирования химико-технологических систем / В.В. Кафаров, В.А. Петров, В.П. Мешалкин. – Москва : Химия, 1976.

4 Коричко, В.П. Теоретические основы САПР / В.П. Коричко [и др.]. – Москва : Энергоатомиздат, 1987.

5 Котов, И.В. Математическое моделирование макроэкономических процессов / И.В. Котов [и др.]. – Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

6 Краснощеков, П.С. Принципы построения моделей / П.С. Краснощеков, А.А. Петров. – Москва : Изд-во Московского ун-та, 1983.

7 Кроу, К. Математическое моделирование химического производства / К. Кроу. [и др.]. – Москва : Мир, 1973.

8 Любарский, Г.Я. Математическое моделирование и эксперимент / Г.Я. Любарский [и др.]. – Киев : Наук. думка, 1987.

9 Математическое моделирование: сборник статей / Под ред. Дж. Эндрюса и Р. Марк-Лоуна. – Москва : Мир, 1979.

10 Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа /Н.Н. Моисеев. – Москва : Наука, 1981.

11 Морозов, К.Е. Математическое моделирование в научном познании / К.Е. Морозов. – Москва : Мысль, 1969.

12 Николаев, В.И. Системотехника: методы и приложения / В.И. Николаев, В.М. Брук. – Ленинград : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1985.

13 Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение вычислительного эксперимента. – Москва: Наука, 1987.

14 Пешель, М. Моделирование сигналов и систем / М. Пешель. – Москва : Мир, 1981.

15 Попов, Ю.П. Вычислительный эксперимент / Ю.П. Попов, А.А. Самарский. – Москва : Знание, 1983. – № 11.

16 Самарский, А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент / А.А. Самарский. //Вестник АН СССР. – Москва, 1979. – № 5.– С. 38–49.

17 Скворцов, В.В. Математический эксперимент в теории разработки нефтяных месторождений / В.В. Скворцов. – Москва : Наука, 1970.

18 Смит, Д.М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / Д.М. Смит. – Москва : Машиностроение, 1980.

19 Советов, Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – Москва : Высш. шк., 1985.

20 Стрейц, В. Методы пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. – Москва : Наука, 1985.

21 Хорафас, Д.С. Системы и моделирование / Д.С. Хорафас. – Москва : Мир, 1987.

22 Цирлин, А.М. Оптимальное управление технологическими процессами / А.М. Цирлин. – Москва : Энергоатомиздат, 1986.

23 Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Р. Шеннон. – Москва : Мир, 1978.

24 Шрайбер, Т.Дж. Моделирование на GPSS / Т.Дж. Шрайбер. – Москва : Машиностроение, 1980.

25 Яковлев, Е.И. Машинная имитация/Е.И. Яковлев. – М.: Наука, 1975.

26 Шрейдер, Ю.А. Системы и модели / Ю.А. Шрейдер, А.А. Шаров. – Москва : Радио и связь, 1982.

27 Турчак, Л.И. Основы численных методов : учеб. пособие. – 2-е изд. доп. и перераб. / Л.И. Турчак, П.В. плотников. – Москва : Физматлит, 2002. –304 с.

28 Данилина, Н.И. Вычислительная математика : учеб. пособие для техникумов / Н.И. Данилина [и др.]. – Москва : Высш. шк., 1985.

## СОДЕРЖАНИЕ